



PIZZOFALCONE



BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio
Palchetto
Num.° d'ordine



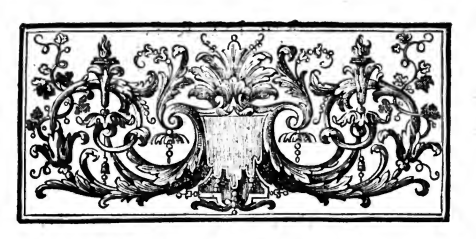
RECHERCHES
SUR LA PRÉCESSION
DES EQUINOXES,
ET SUR LA NUTATION
DE L'AXE DE LA TERRE,
DANS LE SYSTÊME NEWTONIEN.

Par M. d'Alembert, des Académies Royales des Sciences de Paris & de Berlin, & de la Société Royale de Londres.



A PARIS,
Chez David l'aîné, Libraire, rue S. Jacques, à la Plume d'or.

MDCCXLIX.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.



A MONSIEUR

LE MARQUIS LOMELLINI,

ci-devant Envoyé Extraordinaire de la République de Genes à la Cour de France.

MONSIEUR,

Les plus grands génies de l'Antiquité mettoient le nom de leurs amis à la tête de leurs Ouvrages, parce

a ij

qu'un ami leur étoit plus cher qu'un protecteur. Un ſentiment ſi noble & ſi digne de vous, eſt tout ce que je puis imiter d'eux. Ce n'eſt point à votre naiſſance que je rends hommage, ce ſeroit mettre vos Ancêtres à votre place, & oublier que j'écris à un Philoſophe. L'accueil que vous faites aux gens de Lettres ne leur laiſſe point appercevoir la ſupériorité de votre rang, parce que vous n'avez point à leur envier la ſupériorité des lumieres. Auſſi, non content de rechercher leur commerce, vous leur témoignez encore cette conſidération réelle ſur laquelle ils ne ſe méprennent pas quand ils en ſont dignes; & comme la vanité n'a point de part à votre eſtime pour eux, la réputation ne vous en impoſe point dans vos jugemens. Je vous préſente donc ces recherches, MONSIEUR, *comme à un Geométre profond, qui a ſçû joindre aux agrémens de l'eſprit les plus ſublimes connoiſſances, & dont*

je distingue le suffrage parmi le petit nombre de ceux qui peuvent véritablement me flatter. J'espere que ce fruit de mon travail occupera quelques momens de votre loisir, entretiendra l'amitié que vous avez pour moi, & vous rappellera quelquefois le souvenir du respectueux attachement avec lequel je suis,

MONSIEUR,

Votre très-humble & très-obéissant Serviteur, D'ALEMBERT.

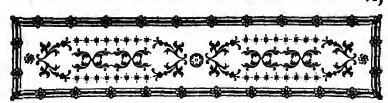
A Paris, ce 15 Juin 1749.

Extrait des Regiſtres de l'Académie Royale des Sciences.

Du 14 Juin 1749.

MEſſieurs CLAIRAUT & DE MONTIGNY, qui avoient été nommés pour examiner un Ouvrage de M. D'ALEMBERT, intitulé : *Recherches ſur la préceſſion des Equinoxes & ſur la nutation de l'Axe de la Terre dans le ſyſtême Newtonien*, en ayant fait leur rapport ; l'Académie a jugé cet Ouvrage digne de l'impreſſion. En foi de quoi j'ai ſigné le préſent Certificat. A Paris, ce 14 Juin 1749.

GRAND-JEAN DE FOUCHY, *Sécretaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.*



INTRODUCTION.

L'Esprit de systême est dans la Physique, ce que la Métaphysique est dans la Geométrie : s'il est quelquefois nécessaire pour nous mettre dans le chemin de la vérité, il est presque toujours incapable de nous y conduire par lui-même. Eclairé par l'observation de la nature, il peut entrevoir les causes des Phenomenes : mais c'est au calcul à assurer, pour ainsi dire, l'existence de ces causes, en déterminant exactement les effets qu'elles peuvent produire, & en comparant ces effets avec ceux que l'expérience découvre. Toute hypothese dénuée d'un tel secours, acquiert rarement ce degré de certitude qu'on doit toujours se proposer dans les Sciences naturelles, & qui néanmoins se trouve si peu dans ces conjectures frivoles, qu'on honore du nom de systêmes. S'il ne pouvoit y en avoir que

de cette eſpéce, le principal mérite du Phyſicien ſeroit, à proprement parler, d'avoir l'eſprit de ſyſtême & de n'en faire jamais.

De-là il s'enſuit, que parmi les différentes ſuppoſitions que nous pouvons imaginer pour expliquer un effet, celles qui par leur nature nous fourniſſent des moyens infaillibles de nous aſſurer ſi elles ſont vraies, ſont les ſeules dignes de notre examen. Le ſyſtême de l'Attraction eſt de ce nombre, & mérite, au moins à cet égard, l'attention des Philoſophes. En effet, ſi les Corps céleſtes ſe meuvent dans un eſpace non réſiſtant, en s'attirant les uns les autres avec une force réciproquement proportionnelle au quarré de leur diſtance, la recherche de leur mouvement eſt un Problême de Méchanique, pour lequel nous avons toutes les données néceſſaires. La ſolution de ce Problême indiquera les Phenomenes tels qu'ils doivent être dans le ſyſtême de l'Attraction: il n'y aura plus qu'à les comparer avec les Phenomenes réels, pour juger de l'autorité que ce ſyſtême doit avoir dans l'Aſtronomie Phyſique.

Quoique l'examen de cette importante queſtion renferme de grandes difficultés de calcul, peut-être touchons-nous au moment de ſa déci-
ſion :

ſion : la perfection à laquelle l'Analyſe s'éleve de jour en jour, nous donne lieu de l'eſperer. Ce ſera du moins contribuer à l'avancement des Sciences, que de remplir quelque partie d'un ſi grand objet. Animé par ce motif, j'ai entrepris de diſcuter dans cet Ouvrage les moyens que l'Attraction peut fournir d'expliquer un des principaux Phenomenes céleſtes.

Pour peu qu'on ait de connoiſſances dans l'Aſtronomie, on ſçait que la Sphere des Etoiles paroît ſe mouvoir d'Occident en Orient autour des Pôles de l'Ecliptique d'un mouvement très-lent, qui, ſuivant les obſervations des Aſtronomes, eſt d'environ 50 ſecondes chaque année. Cette apparence vient d'un mouvement réel de l'Axe de la terre autour des Pôles de l'Ecliptique, en conſéquence duquel les points Equinoctiaux, c'eſt-à-dire, les points où l'Ecliptique & l'Equateur ſe coupent, changent continuellement de place, & rétrogradent chaque année d'Orient en Occident d'environ 50 ſecondes. La rétrogradation de ces points, a été nommée *Préceſſion des Equinoxes* (*a*). Mais quelle eſt la cauſe d'un mou-

(*a*) Le mot de *Préceſſion des Equinoxes* peut venir, ou de ce que le mouvement des points Equinoctiaux ſe fait, pour

vement ſi ſingulier dans l'Axe de la terre ? l'Attraction peut-elle en rendre raiſon ? C'eſt ce que je me ſuis propoſé d'examiner.

Newton, qui n'a preſque rien haſardé, & que par cette raiſon nos Syſtematiques n'ont pas mis au rang des Philoſophes, paroît n'avoir pas porté dans l'explication de ce Phenomene la lumiere qu'il a répandue ſur tant d'autres. Il trouve, à la vérité, par une méthode dont on ne ſçauroit trop admirer la fineſſe, que la préceſſion annuelle des Equinoxes doit être de 50 ſecondes, telle qu'elle eſt en effet. Mais ſi on ne ſçauroit deſirer une plus grande exactitude dans l'accord de ſes calculs avec les obſervations, il me ſemble qu'il n'en eſt pas de même des principes ſur leſquels ſon Analyſe eſt appuyée. Pour développer les raiſons qui m'obligent à penſer ainſi, il eſt néceſſaire de donner une idée de l'ingénieuſe Théorie de M. *Newton*, autant que les bornes & la

---

parler le langage des Aſtronomes, vers les Signes qui *précedent*, c'eſt-à-dire, contre l'ordre naturel des Signes; ou de ce que par la rétrogradation de ces points le moment où l'Equinoxe arrive chaque année, *précede* celui où la Terre revient au point de ſon orbite où l'Equinoxe étoit arrivé l'année d'auparavant.

nature de cette Introduction pourront me le permettre.

Imaginons que la Terre ſoit une maſſe Sphérique, diviſée en deux Hémiſpheres par un plan perpendiculaire à l'Ecliptique, qui joigne les centres de la Terre & du Soleil, & que le Soleil ſeul agiſſe ſur cette maſſe en attirant les parties qui la compoſent ; il eſt certain que l'action de cet Aſtre ſur les deux Hémiſpheres ſera parfaitement ſemblable, en quelque point que la Terre ſe trouve ſur l'orbite qu'elle décrit. Ainſi dans cette hypotheſe, l'Axe de la terre conſerveroit toujours une ſituation conſtante, c'eſt-à-dire, demeureroit toujours parallele à lui-même durant la révolution de la Terre autour du Soleil. Mais on ſçait par les obſervations, que la Terre eſt un Sphéroide applati, & la Théorie de la gravitation concourt même avec les meſures actuelles à lui donner cette figure. Ainſi pour changer notre Globe en un Sphéroide de cette forme, ſuppoſons qu'il ſoit recouvert d'une eſpéce d'enveloppe ſolide dont l'épaiſſeur aille en augmentant depuis les Pôles juſqu'à l'Equateur ; il eſt évident, que tandis que la Terre parcourt ſon orbite, un plan perpendiculaire à l'Eclipti-

que qui joindroit les centres de la Terre & du Soleil, diviseroit notre Sphéroide en deux portions, qui seroient à la vérité semblables & égales, mais qui ne seroient point placées de la même maniére par rapport à ce plan, excepté lorsque l'Axe de la terre se trouveroit dans le plan même ; d'où il est aisé de voir, que dans le cas du Sphéroide, l'action du Soleil sera différente sur les deux moitiés de la Terre, & déja l'on doit entrevoir que cette inégalité produira dans l'Axe terrestre un mouvement de rotation, comme il arrive à une verge dont les deux parties sont poussées avec des forces différentes ou différemment appliquées.

Pour déterminer le mouvement de rotation dont nous venons de parler, M. *Newton* suppose que la masse de toute l'enveloppe extérieure du Globe soit, pour ainsi dire, resserrée & réduite à un seul anneau très-mince & très-dense, placé dans le plan de l'Equateur, & qui environne la Terre à peu près comme on voit l'horison dans nos Globes terrestres. Ensuite faisant abstraction du Globe, il imagine que les particules dont l'anneau est composé, soient une infinité de petites Lunes adhérentes entr'elles, &

qui entraînées par le mouvement diurne des points de l'Equateur, tournent en un jour autour du centre de la Terre à la distance de son demi-diamétre. M. *Newton* trouve par la Théorie de l'Attraction que les *nœuds* de ces petites Lunes, c'est-à-dire les points d'intersection de leur orbite, ou, ce qui revient au même, de l'anneau, avec le plan de l'Ecliptique, devroient rétrograder chaque année d'Orient en Occident d'environ 45 minutes. Voilà quel seroit, selon ce grand Geométre, le mouvement des points Equinoctiaux, si l'enveloppe dont nous avons parlé étoit réduite à un anneau solide placé dans le plan de l'Equateur, & que le Globe fut supposé anéanti. Et ce mouvement, qui est déja si considérable par rapport à la précession réelle des Equinoxes, auroit été trouvé beaucoup plus grand, si on avoit eu égard à l'action de la Lune. Mais plusieurs circonstances concourent à le diminuer considérablement, & M. *Newton* paroît les combiner avec tant d'adresse, qu'il réduit la précession à n'être précisément que de 50 secondes, tel que le donnent les observations. Voici en général les principes qu'il emploie pour arriver à un résultat si frappant.

Le mouvement de 45 minutes que l'anneau devroit avoir s'il étoit seul, doit se partager entre lui & tout le Globe auquel il est adhérent, & comme la masse du Globe est beaucoup plus grande que celle de l'anneau, la distribution du mouvement doit se faire de maniére, que la vitesse annuelle de 45 minutes en soit très-diminuée. En effet, on conçoit aisément que si un Corps à qui l'on a imprimé une vitesse quelconque, est obligé de la partager avec un autre Corps de masse beaucoup plus grande, la vitesse commune & restante aux deux Corps, ne sera qu'une très-petite partie de la vitesse primitive.

Une seconde circonstance contribue à diminuer encore le mouvement de l'anneau; c'est que l'action du Soleil sur l'enveloppe réelle qui environne le Globe, n'est que les deux cinquiémes de l'action de cet Astre sur l'anneau, où nous avons supposé d'abord que toutes les particules de l'enveloppe étoient réunies. Enfin, l'inclinaison de l'Axe terrestre au plan de l'Ecliptique doit modifier aussi l'action du Soleil: car selon que cet Axe sera différemment incliné, il fera à chaque point de l'Ecliptique un angle différent avec la ligne qui joint les centres de la

Terre & du Soleil ; par conſéquent la quantité & la loi de l'action du Soleil dépend de l'inclinaiſon de l'Axe, & c'eſt auſſi ce que l'Analyſe apprend.

Toutes ces remarques étant rapprochées & combinées par le calcul, M. *Newton* trouve que le mouvement annuel & rétrograde de la ſection de l'Equateur & de l'Ecliptique, cauſé par l'action ſeule du Soleil, doit être de 10 ſecondes par an. Or l'action ſeule de la Lune doit produire, ſelon lui, un mouvement quadruple de celui-là, c'eſt-à-dire de 40 ſecondes ; d'où il conclut, qu'en conſéquence des deux actions réunies, le mouvement des points Equinoctiaux doit être de 50 ſecondes.

Une conformité ſi exacte entre le calcul & le Phenomene, paroît ſans doute une des preuves les plus favorables au ſyſtême de l'Attraction. Mais les conſéquences qui en réſultent perdront de leur force, ſi quelques-unes des propoſitions qui ſervent de baſe à la Théorie de M. *Newton*, ſont, ou douteuſes, ou peu exactes. J'oſerois dire que j'ai tout lieu de le croire, ſi je ne ſavois avec quelle retenue, & pour ainſi dire, avec quelle ſuperſtition on doit juger les grands hommes.

Avant que d'entrer là-deſſus dans aucun détail, je crois devoir faire une obſervation qui ne ſera peut-être pas jugée inutile. M. *Newton* regarde l'anneau qui environne la Terre, comme composé de petites Lunes, & il prend pour hypotheſe que le mouvement des nœuds de cet anneau, ſeroit le même, ſoit que les Lunes fuſſent iſolées ou adhérentes les unes aux autres. Cette propoſition n'eſt pas, ce me ſemble, aſſez évidente pour être donnée comme une eſpéce d'axiome, & j'avoue que j'ai eu beſoin d'un calcul aſſez difficile pour en reconnoître la vérité. Il eſt certain que des Lunes iſolées n'auroient pas toujours leurs centres placés dans un même plan; car l'Attraction du Soleil ſur ces Lunes etant différente ſelon leur différente ſituation, le mouvement de leurs nœuds varieroit ſuivant la poſition où chaque Lune ſe trouveroit par rapport à ſon nœud; au lieu que le mouvement des nœuds de toutes les Lunes ſeroit parfaitement le même, ſi elles formoient un anneau ſolide. Ainſi la ſolidité de l'anneau doit néceſſairement influer ſur le mouvement des nœuds de chaque Lune priſe ſéparément: il eſt vrai qu'elle n'altere pas le mouvement moyen, qui eſt le ſeul dont M. *Newton* veut

veut parler. Mais quoique ſon hypotheſe ſoit vraie, n'étoit-on pas en droit d'en exiger une démonſtration ? Perſonne que je ſçache, ne l'avoit encore donnée, & je me flatte qu'on conviendra après avoir lû la mienne, que cet endroit de M. *Newton* avoit au moins beſoin d'être expliqué. Mais je n'inſiſte pas ſur une obſervation auſſi légere. Les remarques qui ſuivent me paroiſſent un peu plus importantes.

En premier lieu, ce grand Geométre ſuppoſe que la Terre eſt homogene, & que la difference des Axes eſt $\frac{1}{230}$; or cette hypotheſe n'eſt point conforme aux obſervations de la figure de la Terre, qui paroiſſent adoptées par les plus célébres Aſtronomes; car ſuivant ces obſervations, la différence des Axes eſt d'environ $\frac{1}{178}$, &, ce qui en eſt une conſéquence néceſſaire, la Terre n'eſt pas un Sphéroide entiérement homogene. J'avoue que cette erreur, ſi c'en eſt une, ne pouvoit être connue de M. *Newton*, & ne ſçauroit par conſéquent lui être imputée ; car ce n'eſt que depuis très-peu d'années qu'on a pû determiner le vrai rapport des Axes de la terre. Mais je crois qu'on doit avouer auſſi, que le peu de certitude de l'hypotheſe rend la Théorie inſuffiſante, On

verra même dans un moment, que cette hypothese doit donner, suivant mon calcul, un résultat fort différent de celui de M. *Newton*.

En second lieu, il me semble qu'on peut former quelques doutes sur le rapport établi par M. *Newton*, entre les forces que le Soleil & la Lune exercent sur la terre. Les forces dont il s'agit ici, ne sont autre chose que la différence de l'Attraction de ces Astres sur le centre de la terre, & sur ses parties extérieures. Elles sont donc entiérement analogues à celles qui produisent le flux & reflux de la Mer. Car le mouvement des eaux de l'Ocean, vient, comme je l'ai fait voir ailleurs (†), de ce que les différentes parties de la Terre sont attirées vers le Soleil & vers la Lune avec une force plus ou moins grande que son centre. C'est aussi par des observations choisies de la hauteur des marées, que M. *Newton* détermine le rapport de la force du Soleil à celle de la Lune, & qu'il trouve que la seconde est environ quadruple de la premiere. Cette méthode, qui est la seule dont ce grand Philosophe ait pû faire usage, est très-ingénieu-

(†) *Réflexions sur la cause des Vents*. Paris, 1747.

ſe, tant par elle-même, que par la maniére dont ſon illuſtre Auteur l'a employée. Mais on doit convenir, ce me ſemble, qu'elle a quelque choſe d'un peu vague. La profondeur & la figure des côtes, les vents & les courans, altérent tellement la hauteur des marées, qu'il n'y a peut-être pas deux endroits ſur la Terre, où elle ſoit exactement la même. Auſſi M. *Daniel Bernoulli* trouve-t'il par d'autres obſervations qu'il prétend mieux choiſies & plus exactes, que la force de la Lune eſt à celle du Soleil, comme 5 eſt à 2; ce qui réduiroit le mouvement annuel des points Equinoctiaux à moins de 35 ſecondes, en conſervant d'ailleurs toutes les autres hypotheſes de M. *Newton*. Il me ſemble que bien loin de déterminer la préceſſion des Equinoxes par un rapport ſi incertain des deux forces, il ſeroit bien plus ſûr de trouver ce rapport par le moyen de la quantité obſervée de la préceſſion, & des mouvemens connus de l'Axe de la terre. C'eſt ce que nous examinerons un peu plus bas.

Juſqu'ici, les objections que nous avons oſé faire à M. *Nweton*, ne tombent que ſur des hypotheſes incertaines, ou tout au plus ſur des erreurs de fait, qu'il n'étoit pas à portée de corri-

ger, ni même de connoître. Mais voici, ce me ſemble, une mépriſe plus réelle : c'eſt celle où il paroît tomber, en calculant le mouvement que l'action du Soleil doit produire dans l'Axe de la terre. Je ne crois pas que le mouvement de l'enveloppe extérieure du Globe, & celui de l'anneau auquel on a réduit cette enveloppe, doivent être entr'eux comme les forces qui les animent, ainſi que M. *Newton* ſemble le ſuppoſer; il eſt néceſſaire pour déterminer le rapport de ces mouvemens, d'avoir égard à la figure des maſſes que les puiſſances ont à mouvoir. Car quoique les maſſes ſoient égales, elles ſont cependant formées de parties différemment diſpoſées, & on ne peut déterminer le mouvement de la maſſe totale, ſans connoître le mouvement iſolé, pour ainſi dire, de chacune de ces parties. Qu'une force quelconque agiſſe ſur un lévier dont toute la maſſe ſoit ramaſſée à une de ſes extrémités, il eſt facile de voir que le mouvement de cette maſſe ne ſera pas le même, que ſi elle étoit répandue ſur toute la longueur du lévier. La raiſon en eſt évidente, c'eſt que le bras de lévier par lequel chaque particule eſt pouſſée, ſe trouve différent dans les deux cas.

Enfin, M. *Newton* tombe encore, ſi je ne me trompe, dans une autre mépriſe, par la façon dont il partage entre le globe & l'anneau, le mouvement que l'anneau devroit avoir s'il étoit iſolé & non adhérent au globe. En corrigeant le principe dont il ſe ſert pour faire cette diſtribution, & dont il ſeroit difficile de donner ici l'idée, on voit que l'action ſeule du Soleil devroit produire un mouvement annuel de 12 ſecondes dans les points Equinoctiaux; deſorte qu'en admettant même toutes les autres hypotheſes dont nous croyons avoir montré l'inſuffiſance ou le peu de fondement, la préceſſion des Equinoxes devroit être, ſuivant la Théorie de M. *Newton*, d'environ 10 ſecondes plus grande que ne la donnent les obſervations : différence qui n'auroit pas échappé aux Aſtronomes.

Mais cette différence même quoiqu'aſſez ſenſible, eſt cependant bien plus petite que celle qu'on devroit trouver réellement, en faiſant entrer dans le calcul toutes les circonſtances néceſſaires. Car le mouvement de rotation de la terre autour de ſon Axe, auquel M. *Newton* ne paroît pas faire toute l'attention convenable, & qui ſe combine avec l'action du Soleil & de la Lune,

doit, toutes choſes d'ailleurs égales, influer pour beaucoup ſur la quantité de la préceſſion ; & je crois avoir démontré dans cet Ouvrage, que ſi l'on a égard à ce mouvement, & que l'on combine avec exactitude toutes les forces qui agiſſent ſur notre Globe, le mouvement des points Equinoctiaux ſe trouvera de 23 à 24 ſecondes, en faiſant abſtraction de l'action de la Lune, & en regardant la Terre comme un Sphéroide homogene ; réſultat qui ſeroit ſans doute très-contraire à l'Attraction, ſi le rapport des Axes de la terre & celui des deux forces étoient tels que M. *Newton* le ſuppoſe.

L'accord apparent des calculs de ce grand Geométre avec les obſervations, ne paroît donc pas auſſi favorable à l'Attraction, qu'on auroit pû le croire. Cependant il ſeroit injuſte d'attribuer à ce ſyſtême ſans autre examen, un défaut, qui, ſuppoſé qu'il ſoit réel, n'eſt peut-être que dans les principes & les ſuppoſitions dont l'Auteur s'eſt ſervi. D'ailleurs, eſt-il ſurprenant qu'un Philoſophe à qui nous devons un ſi grand nombre de découvertes, ait laiſſé quelques pas à faire dans la carrière immenſe où il a tant avancé ? & pouvons-nous nous glorifier, ſi inſtruits com-

me nous le ſommes par des obſervations dont il n'a pû avoir le ſecours, & aidés par une Analyſe que nous tenons de lui preſque toute entiére, nous nous trouvons en état d'ajouter quelque choſe à l'édifice qu'il a ſi prodigieuſement élevé? C'eſt d'après ces réflexions que j'ai cru pouvoir traiter le point d'Aſtronomie Phyſique dont il s'agit, comme un ſujet entiérement nouveau. J'ai tâché de trouver par une méthode rigoureuſe & directe, le mouvement que l'action réunie du Soleil & de la Lune doit produire dans l'Axe de la terre. Voici la méthode que j'ai ſuivi pour y parvenir.

Je détermine d'abord l'action par laquelle le Soleil tend à imprimer du mouvement à l'Axe terreſtre, & comme elle réſulte des différentes forces que cet Aſtre exerce ſur les parties de la terre, je réduis par un calcul exact toutes ces forces à une ſeule. Je fais la même choſe pour la Lune, en ayant égard à l'inclinaiſon & à la poſition de ſon orbite; & par cette méthode, je trouve à chaque inſtant la direction & la quantité abſolue des deux forces qui tendent à faire tourner l'Axe de la terre. Ces forces étant connues, il reſte encore à déterminer leur effet, & c'eſt

la partie de notre Problême la plus délicate & la plus compliquée.

J'ai démontré dans mon *Traité de Dynamique*, que pour trouver à chaque instant le mouvement d'un corps animé par un nombre quelconque de forces, il faut regarder le mouvement qu'il avoit dans l'instant précedent, comme composé d'un mouvement qui est détruit par ces forces, & d'un autre mouvement qu'il doit prendre réellement, & qui doit être tel, que les parties du corps puissent le suivre sans se nuire les unes aux autres. Ce principe supposé, je commence par chercher de la maniére la plus générale le mouvement de la Terre, en imaginant qu'elle tourne autour de son Axe avec une vitesse quelconque, uniforme ou non, & que l'Axe reçoive en même-tems un mouvement quelconque de rotation autour du centre. Dans cette hypothese, le mouvement de chaque particule durant un instant quelconque, peut être supposé formé de trois autres mouvemens, dont deux sont paralleles au plan de l'Ecliptique, & dont le troisiéme lui est perpendiculaire: chacun de ces mouvemens se change l'instant suivant en un autre, & peut être regardé comme composé de cet autre mouvement, & d'un

d'un ſecond qui eſt détruit par l'action du Soleil & de la Lune, action que nous venons de réduire à deux forces, dont la quantité & la direction ſont connues. Il n'eſt donc plus queſtion que de chercher les loix d'équilibre entre ces forces & celles qu'on doit ſuppoſer être détruites dans chaque particule. Ce qui m'oblige à donner la ſolution générale d'un Problême de Statique, où je détermine par un aſſez grand nombre de propoſitions les loix de l'équilibre entre des puiſſances qui n'agiſſent pas dans le même plan, ni ſuivant des lignes paralleles.

Les différentes équations que fournit la ſolution de ce Problême, étant appliquées au cas particulier dont il s'agit, ſe transforment en deux formules qui renferment la loi du mouvement de l'Axe de la terre. Ces formules ſont au nombre de deux, parce que la poſition de l'Axe de la terre à chaque inſtant dépend de deux variables; ſçavoir du chemin qu'il fait circulairement autour des Pôles de l'Ecliptique, & de ſon inclinaiſon ſur le plan de ce grand cercle. Car la variation de cette inclinaiſon eſt une circonſtance à laquelle il eſt néceſſaire d'avoir égard. On eſt d'autant moins en droit de la négliger, qu'on

auroit de la peine à voir ſans le ſecours d'un calcul aſſez ſubtil, pourquoi cette variation eſt ſi peu conſidérable, tandis que le mouvement circulaire de l'Axe de la terre autour des Pôles de l'Ecliptique eſt au contraire très-ſenſible. Selon M. *le Chevalier de Louville*, l'obliquité de l'Ecliptique ou l'angle qu'elle fait avec l'Equateur, ne doit diminuer que d'environ une minute en cent ans; & cette diminution, quoique fort petite, n'eſt pas même bien conſtatée, parce qu'elle eſt fondée ſur des obſervations anciennes dont on peut révoquer en doute l'exactitude.

Il n'en eſt pas de même de celles que l'illuſtre M. *Bradley* vient de publier, & par leſquelles il trouve que l'Axe de la terre eſt ſujet à une *nutation* ſenſible, c'eſt-à-dire à une eſpéce de balancement ou de vibration, dont le centre de la terre eſt le point fixe, & par lequel cet Axe s'incline, tantôt plus, tantôt moins, ſur le plan de l'Ecliptique. L'étendue ou la quantité totale de cette nutation eſt de 18 ſecondes, ſuivant les obſervations de M. *Bradley*: & ſa période répond exactement à celle des nœuds de la Lune, c'eſt-à-dire des points d'interſection de l'orbite Lunaire avec l'Ecliptique. Ces points qui ſe meu-

vent, comme l'on ſçait, d'un mouvement rétrograde, achevent leur révolution à peu près en dix-neuf ans. Or M. *Bradley* a obſervé, que durant ce tems l'extrémité de l'Axe de la terre s'éloigne du plan de l'Ecliptique d'environ 18 ſecondes, & s'en rapproche enſuite de la même quantité pour revenir à ſa premiere place.

Si on réſout par approximation les deux formules dont j'ai parlé plus haut, & auxquelles j'ai réduit la ſolution du Problême, on trouve que la nutation obſervée par M. *Bradley*, eſt en effet le plus ſenſible de tous les mouvemens auxquels l'Axe de la terre peut être ſujet pour s'approcher ou pour s'éloigner de l'Ecliptique, & qu'elle doit ſuivre exactement la loi que ce célébre Aſtronome a déterminée par ſes obſervations. On voit de plus, par les mêmes formules, que les points Equinoctiaux doivent en effet rétrograder fort lentement, & que leur mouvement, quoiqu'à peu près uniforme, eſt ſujet à une petite irrégularité qui dépend de la nutation de l'Axe, & qui eſt auſſi confirmée par les obſervations. Si ces réſultats ſont auſſi favorables à l'Attraction qu'on peut le deſirer, l'Analyſe délicate & pénible qu'il faut employer pour y parvenir, me

donne lieu de penser qu'il n'y avoit que ce seul moyen de procurer aux partisans de M. *Newton* un nouvel avantage, & je crois être le premier à qui ils le doivent. La nutation de l'Axe terrestre confirmée par les observations & par la Théorie, fournit, ce me semble, la démonstration la plus complette de la gravitation de la Terre vers la Lune, & par conséquent de la tendance des Planetes principales vers leurs Satellites. Jusqu'ici cette tendance n'avoit paru se manifester que dans le flux & reflux de la Mer, Phenomene peut-être trop compliqué & trop peu susceptible d'un calcul rigoureux, pour pouvoir réduire au silence les adversaires de la gravitation réciproque. La nutation est un effet plus simple, auquel je ne vois pas ce qu'ils auront à répondre. Ainsi les réflexions que j'ai crû pouvoir faire sur la Théorie de M. *Newton*, étant rapprochées des nouvelles preuves que mon Ouvrage va fournir à l'Attraction, ne serviront qu'à montrer, combien cet ingénieux systême est jusqu'ici à l'abri de toute atteinte, & combien l'idée seule en étoit heureuse.

M. *Bradley* dit avoir vû une Table calculée par M. *Machin* d'après la Théorie, pour déter-

miner la nutation de l'Axe de la terre. Mais il me ſemble que M. *Machin* n'a encore rien publié de ſon travail. D'ailleurs, l'idée légere que l'on pourroit s'en former ſur quelques mots qu'en dit M. *Bradley*, feroit juger que ſa Méthode a quelque choſe de vague, ſi on ne devoit pas préſumer que ce grand Geométre a traité un Problême ſi important avec toute l'exactitude & la préciſion néceſſaires. Je ſuis cependant ſurpris, que ſuivant la Théorie de M. *Machin* adoptée par M. *Bradley*, le Pôle vrai de la terre doive décrire autour du Pôle moyen un cercle, ou tout au plus une Ellipſe très-peu allongée ; car ſuivant mes formules, les Axes de cette Ellipſe doivent être entr'eux environ comme 3 à 4. Cette différence entre nos deux Théories, me porte à croire, que l'équation ou l'inégalité de la préceſſion des Equinoxes n'eſt peut-être pas exactement telle, que M. *Bradley* l'a trouvé d'après M. *Machin*, & d'après ſes propres obſervations. Comme l'erreur, s'il y en a, eſt fort petite, & difficile à obſerver, j'exhorte les Aſtronomes à s'y rendre attentifs ; & pour leur faciliter ce travail, j'ai donné dans un article particulier des formules très-ſimples, pour calculer d'après mes principes la nu-

tation de l'Axe de la terre, l'équation de la précession, & les variations qui en résultent dans la position des Etoiles.

Pour rendre ma solution aussi générale qu'elle pouvoit l'être, j'ai regardé la Terre comme un Sphéroide composé de couches solides, dont les densités varient suivant une loi quelconque, & dont la figure soit aussi telle qu'on voudra, Elliptique ou non, mais cependant à peu près Sphérique. Il est d'autant plus nécessaire de ne se borner à aucune hypothese particuliere sur ce sujet, que les observations ne nous ont encore rien appris sur la figure ni sur la densité des couches intérieures de notre Globe, quoiqu'elles nous ayent fait connoître à peu près sa figure extérieure. Mais il semble d'un autre côté, que la généralité de notre supposition doive rendre la solution du Problême tout-à-fait indéterminée. Car le mouvement que l'action du Soleil & celle de la Lune impriment à l'Axe de la terre, dépend beaucoup de la figure & de l'arrangement des couches intérieures. Or dans l'ignorance où nous sommes sur cet arrangement & sur le rapport de la force du Soleil à celle de la Lune, comment pourrons-nous assurer que la précession

des Equinoxes doit être en effet de 50 secondes? Heureusement la découverte de M. *Bradley* sur la nutation, nous met en état de résoudre une partie de ces difficultés. Car quoique nous ignorions la constitution intérieure de notre Globe, la Théorie d'accord avec les observations, nous apprend que la précession annuelle vient de l'action réunie du Soleil & de la Lune, & qu'au contraire la nutation & l'équation de la précession doivent être attribuées à l'action de la Lune seule. Le calcul montre de plus, que quelque arrangement qu'on suppose dans les différentes couches de la Terre, la quantité de la nutation & de la précession annuelle auront toujours entr'elles le même rapport, quoique leurs valeurs absolues varient dans chaque hypothese. D'où il s'ensuit que sans connoître l'arrangement des parties de la terre, on peut trouver le rapport des forces du Soleil & de la Lune, en comparant la quantité observée de la nutation avec la quantité observée de la précession. Je trouve par cette Méthode, que la force Lunaire est à celle du Soleil, à peu près comme 7 est à 3, rapport qui est beaucoup moindre que celui de M. *Newton*, & presque le même que celui de M. *Daniel Ber*-

noulli, mais qui eſt déduit, ce me ſemble, de principes bien plus exacts. Je regarde cette découverte, ſi c'en eſt une, comme un des avantages les plus importans qu'on puiſſe tirer de ma Théorie. M. *Bradley* s'eſt flatté avec raiſon, que les obſervations qu'il vient de publier, pourroient y conduire. C'eſt aux Savans à juger ſi j'ai rempli ſon attente. Ce grand Aſtronome, ſuppoſant avec les Aſtronomes François la terre plus applatie que dans le cas de l'homogeneité, ſoupçonne que la force de la Lune eſt moindre que M. *Newton* ne l'a trouvée ; ce qui doit en effet paroître aſſez vraiſemblable. Car plus la terre ſera applatie, plus la Lune & le Soleil agiront ſenſiblement pour mouvoir ſon Axe ; ainſi puiſque la quantité de la préceſſion eſt de 50 ſecondes, & que la force du Soleil eſt connue, il faudra diminuer la force de la Lune à meſure qu on ſuppoſera la terre plus applatie. Mais ce raiſonnement, qui eſt ſans doute bon en ſon genre, ne ſçauroit nous conduire à déterminer exactement la force de la Lune, à cauſe du peu de lumieres que nous avons ſur la forme du Globe que nous habitons ; le moyen que j'ai employé me paroît plus direct & plus ſûr. J'avoue cependant qu'il

qu'il ſuppoſe des obſervations très-exactes. Car ſi la nutation étoit ſeulement de deux ſecondes plus grande, le rapport de la force Lunaire à celle du Soleil ſe trouveroit beaucoup plus grand que je ne l'ai aſſigné, & beaucoup plus près de celui de M. *Newton*. Mais le peu d'altération que la Lune paroît cauſer dans le mouvement annuel de la terre autour du Soleil, ſuffiroit peut-être pour montrer que la force de la Lune eſt en effet beaucoup moindre que M. *Newton* ne l'a crû. D'un autre côté, par les obſervations du flux & reflux, la force de la Lune ſur la terre paroît plus grande que celle du Soleil ; or le rapport de 7 à 3 que nous avons trouvé entre les deux forces ſatisfait à ces deux conditions. Je crois donc que l'on peut compter pour le préſent ſur l'exactitude des obſervations de M. *Bradley*, en remarquant ſeulement que la quantité de la nutation a beſoin d'être déterminée avec la préciſion la plus rigoureuſe.

A l'égard de la denſité & de la figure des couches de la Terre, je ne vois pas que mes calculs puiſſent ſervir à la découvrir ; car on peut faire apparemment une infinité d'hypotheſes, dans leſquelles on trouveroit 50 ſecondes pour la quantité de la préceſſion annuelle des Equinoxes ; &

dans un ſi grand nombre de ſuppoſitions, celle que nous devons choiſir nous eſt inconnue. Mais par la même raiſon il y en a une infinité d'autres qui doivent être exclues, comme donnant une quantité trop grande ou trop petite pour le mouvement annuel des points Equinoctiaux. Cette conſidération m'a conduit à des Remarques ſingulieres & curieuſes. On verra, par exemple, que ſi la Terre étoit un corps entiérement ſolide, & compoſé de couches Elliptiques différemment denſes, il faudroit qu'elle fut beaucoup moins applatie qu'elle n'eſt en effet, pour que la préceſſion annuelle fût de 50 ſecondes. Cette remarque fournit, ce me ſemble, une nouvelle preuve de l'inſuffiſance des calculs de M. *Newton*; elle paroît même d'abord contraire au ſyſtême de l'Attraction : mais bien approfondie, elle lui devient très-favorable. Car quand nous regarderions la Terre comme entiérement formée de couches ſolides, rien ne nous forceroit, ce me ſemble, à donner à ces couches la figure Elliptique. Il paroît même douteux par la comparaiſon des degrés de France, de Laponie & du Perou, que la ſurface extérieure de la Terre ait une telle courbure. Mais ſans inſiſter ſur cette remarque, nous pouvons nous contenter d'ob-

ferver que la Terre est en partie solide & en partie fluide. Or suivant le systême de l'Attraction, l'action du Soleil & de la Lune doit exciter dans la partie fluide un mouvement particulier, qui est en effet connu & observé depuis longtems sous le nom de flux & reflux ; ce mouvement est, pour ainsi dire, affecté à la partie fluide & indépendant de celui qu'il doit y avoir dans la partie solide du Globe. Donc le mouvement de l'Axe de la terre vient de l'action du Soleil & de la Lune sur la partie solide ; ainsi quoique la figure de la masse d'eau qui environne notre Globe, dépende de la figure & de la densité des couches solides intérieures, ce n'est point à la figure de cette masse d'eau qu'on doit s'arrêter, en cherchant la précession des Equinoxes. Pour rendre cette vérité plus sensible par une hypothese particuliere & fort simple, j'ai considéré la Terre, ainsi que je l'ai fait ailleurs (†), comme un Sphéroide Elliptique homogene couvert d'une couche de fluide dont la profondeur soit très-petite, par rapport au rayon de la terre, & dont la densité soit différente de celle de la partie solide ; & j'ai montré assez facilement comment on pourroit accorder dans cette supposition, l'applatis-

(†) *Réflexions sur la cause générale des Vents.* Paris, 1747.

ſement connu de la Terre, avec le mouvement connu des points Equinoctiaux.

Comme la ſolution du Problême qui fait l'objet de cet Ouvrage, eſt très-longue & très-compliquée, tant par les principes qu'elle ſuppoſe, que par les calculs qu'elle exige; j'ai cru non-ſeulement devoir expoſer ces principes & ces calculs avec tout le détail & toute la clarté néceſſaires, mais auſſi ne devoir rien négliger de ce qui pouvoit leur prêter un nouveau jour. Outre pluſieurs Remarques particulieres qui ſervent à les appuyer, on trouvera dans cet Ouvrage une ſeconde ſolution du Problême, qui eſt un peu plus ſimple que la premiere, parce qu'elle eſt un peu moins générale, mais qui d'ailleurs conduit aux mêmes formules, quoique par une route fort différente. Cette ſolution eſt ſuivie d'un examen détaillé de la Théorie de M. *Newton* ſur la préceſſion des Equinoxes, examen où j'ai tâché de développer avec toute l'étendue convenable les réflexions que je me ſuis contenté d'indiquer dans cette Introduction.

Au reſte, comme les équations que j'ai déduites de ma Théorie ne ſont réſolues que par approximation, & ne paroiſſent pouvoir l'être que de cette maniére, j'eſpere que par une Analyſe en-

core plus exacte de mes formules, jointe au secours du tems & des obſervations, les Philoſophes pourront acquérir dans la ſuite de nouvelles lumieres ſur un point ſi important de l'Aſtronomie, & ſur l'uſage qu'on peut faire du ſyſtême de l'Attraction pour connoître les plus petits mouvemens de l'Axe de la terre. Les moyens qu'on peut employer pour y parvenir, ſont expoſés en peu de mots à la fin de ces Recherches.

Tel eſt le plan & l'objet de cet Ouvrage; & telle eſt la méthode que je me propoſe de ſuivre, en comparant avec le ſyſtême Newtonien les autres Phenomenes céleſtes. C'eſt par un ſemblable examen, par une Analyſe rigoureuſe, qu'il faut juger l'Attraction, & non par des raiſonnemens Métaphyſiques auſſi peu propres à détruire une hypotheſe qu'à l'établir. Il ne ſuffit pas à un ſyſtême de ſatisfaire aux Phenomenes en gros & d'une maniére vague, ni même de fournir des explications aſſez plauſibles de quelques-uns: les détails & les calculs précis en ſont la pierre de touche; eux ſeuls peuvent apprendre s'il faut adopter une hypotheſe, la rejetter, ou la modifier. Si parmi les Phenomenes que nous connoiſſons, ou parmi ceux que nous découvrirons dans la ſuite, il s'en trouve quelques-uns de contraires

à l'Attraction, nos Geométres en feront plus embarrassés, & nos Métaphysiciens plus à leur aise. Mais s'ils décidoient en sa faveur, il faudroit bien prendre le parti de l'admettre, fût-on forcé de reconnoître une nouvelle propriété dans la matiére, & dût-on se résoudre à n'avoir pas une idée plus nette de la vertu par laquelle les Corps s'attirent, que de celle par laquelle ils se choquent.

Je ne dirai rien ici de l'explication que fournissent les tourbillons Cartesiens de la précession des Equinoxes. L'examen de cette explication n'est point du ressort de cet Ouvrâge, & seroit d'ailleurs hors de saison, dans un tems où les hypothèses & les conjectures vagues paroissent enfin bannies de la Physique. Le systême de *Descartes*, n'a été, si on peut parler ainsi, qu'un feu passager; mais c'est un feu qui a brillé dans la nuit la plus profonde, & à cet égard il doit être regardé comme un monument du génie de son inventeur. Les Sciences & l'Esprit humain ont les plus grandes obligations à ce Philosophe; ses erreurs même étoient au-dessus de son siécle, & n'ont été que trop longtems au-dessus du nôtre: mais ses intérêts sont fort différens de ceux des Sectateurs qui lui restent.

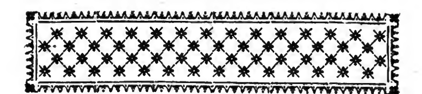
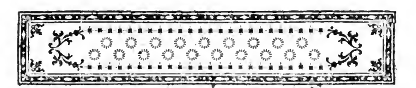


TABLE DES TITRES

Contenus en cet Ouvrage.

Fin de la Table des Titres.



RECHERCHES
SUR LA PRÉCESSION
DES EQUINOXES,
ET SUR LA NUTATION
DE L'AXE DE LA TERRE,
DANS LE SYSTÊME NEWTONIEN.

CHAPITRE PREMIER.

De l'action du Soleil & de la Lune sur la terre, considérée comme un Sphéroide applati.

LEMME I.

1. SOIT PQpq (Fig. 1) *un solide formé par la révolution d'une courbe* PQp *autour de l'Axe* Pp, *& dont tous les points tendent vers un point fixe* S *avec une force proportionnelle à une fonction quelconque de leurs distances à ce point ; je dis que la direction de la force unique qui résulte de la tendance de tous ces points vers* S,

sera dans le plan PSp, *qui passe par le point* S *&* *par l'Axe* Pp.

Car il est évident que le plan *PSp* divise le solide *PQpq* en deux parties parfaitement égales & semblables, & placées de la même maniere, l'une au-dessus, l'autre au-dessous de ce plan. Soient donc deux points *k*, *k'* situés dans une même ligne *kk'* perpendiculaire au plan *PSp*, & également éloignés de ce plan, & soit *C* le centre de gravité du solide, qui doit être placé dans l'Axe *Pp*, comme on le voit aisément. Il est évident, que si on décompose la force du point *k* vers *S* en deux autres; l'une suivant *kC*, l'autre parallele à *CS*, & qu'on décompose de même la force du point *k'* vers *S* en deux autres, l'une suivant *kC*, l'autre parallele à *CS*, les deux forces suivant *kC* & suivant *k'C* seront égales, aussi-bien que les deux forces paralleles à *CS*. Donc à cause que les points *k*, & *k'* sont également éloignés du plan *PSp*, les deux forces suivant *kC*, & *k'C* se réduiront à une seule qui sera dans le plan *PSp* & qui passera par *C*, & de même les deux forces paralleles à *CS* se réduiront à une seule qui sera dans le plan *PSp*. Donc puisque chaque point *k* a toujours un point *k'* qui lui répond dans la perpendiculaire *kk'*, & qui est à la même distance du plan *PSp*, que le point *k*; il s'ensuit que toutes les forces qui agissent sur le solide *PQpq* se réduiront à d'autres forces placées dans le plan *PSp*. Or toutes les fois que différentes forces agissent dans un même plan, on peut aisément les réduire toutes à une

ſeule qui ſoit auſſi dans ce même plan. Donc &c. *Ce Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

2. La même propoſition ſeroit encore vraie, quand le ſolide *PQpq* ſeroit compoſé de couches de différentes denſités, pourvu que chaque couche fut d'une denſité uniforme, & fût un ſolide de révolution. Cela eſt ſi clair, qu'il eſt inutile de nous y arrêter.

COROLL. II.

3. Il eſt viſible 1° que la force qui réſulte des forces ſuivant *kC* & *k'C*, tend à faire avancer le centre *C* en ligne droite, & par conſéquent ne produit dans le ſolide *PQpq* aucun mouvement de rotation autour de ce centre. 2°. Que la force qui réſulte des forces paralleles à *CS*, paſſeroit par le centre *C*, ſi toutes ces forces étoient égales à la force qui tire le centre *C*, ou ſi le ſolide *PQpq* étoit une Sphére. D'où il s'enſuit 1°. que ſi on retranche de la force qui agit ſur chaque point *k* parallelement à *CS*, la force qui tire le point *C* vers *S*, la force qui réſulte de ces différences, eſt la ſeule qui puiſſe produire dans le ſolide *PQpq* un mouvement de rotation autour de ſon centre. 2°. Que ſi on inſcrit un globe *Ppr* au ſolide *PQpq*, & qu'on prenne la différence de la force qui pouſſe chaque point *k* parallelement à *CS* ſur la force qui pouſſe le centre *C*, la force

qui en résultera pour faire tourner le solide $PQpq$ autour du centre C, sera la même que si la Sphére intérieure Ppr étoit anéantie. Le Problême suivant & ses Corollaires, serviront à déterminer cette force & sa direction.

COROLL. III.

4. Si on suppose l'Attraction en raison inverse du quarré de la distance & en raison directe de la masse, & qu'on prenne S pour la masse placée en S qui attire les parties du solide $PQpq$, on aura $\frac{S}{CS^2}$ pour l'Attraction du point C, & $\frac{S.CS}{Sk^3}$ pour celle du point k parallelement à CS. Donc $\frac{S.CS}{Sk^3} - \frac{S}{CS^2}$ (*art. préced.*) sera la force que l'on doit considérer ici dans chaque point k.

LEMME II.

5. *Soïent* E, D, *deux angles quelconques, & soient* Sin. E, *&* Sin. D *leurs Sinus; je dis que* Sin. E × Sin. D $= -\frac{1}{2}$ Cosin. (D + E) + $\frac{1}{2}$ Cos. (D − E).

Car on sçait que Sin. $E = \left(\frac{c^{E\sqrt{-1}} - c^{-E\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right)$, en prenant c pour le nombre dont le Logarithme $= 1$; de même Sin. $D = \left(\frac{c^{D\sqrt{-1}} - c^{-D\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right)$; donc Sin. $E \times$ Sin.

$$D = -\frac{1}{2}\left[\frac{e^{(D+E)\sqrt{-1}} + e^{(-D-E)\sqrt{-1}}}{2}\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{e^{(D-E)\sqrt{-1}} + e^{(E-D)\sqrt{-1}}}{2}\right] = -\frac{1}{2}\,\text{Cof.}\ D+E + \frac{1}{2}\,\text{Cof.}\ D-E.$$

COROLLAIRE.

6. On prouvera de même que Cof. $E \times$ Cof. $D = \frac{1}{2}$ Cof. $D+E+\frac{1}{2}$ Cof. $D-E$, & que Sin. $E \times$ Cof. $D = \frac{1}{2}$ Sin. $D+E+\frac{1}{2}$ Sin. $D-$E. Ces propofitions nous feront utiles dans la fuite.

PROBLÊME I.

7. *Soit une couronne* KkGQqtTK (Fig. 2) *formée de deux cercles dont les rayons* C′K, C′k *différent très-peu, enforte que la largeur* G′g *de la couronne puiffe être cenfée infiniment petite (cette couronne peut repréfenter une des fections de la terre par un plan perpendiculaire à fon Axe, en regardant la terre comme un Sphéroide homogene, & faifant abftraction de la Sphere intérieure) : foit* Pp *une ligne perpendiculaire au plan de cette couronne & repréfentant l'Axe de la terre, dont* C *foit le centre,* PSp *un plan perpendiculaire à ce même plan, &* C′S *une ligne tirée à volonté dans le plan* PSp, *& dont on fuppofe la lon-*

gueur C'S *incomparablement plus grande que* C'K ; *on suppose de plus, que tous les points* g *de cette couronne sont attirés parallelement à* CS *par des forces proportionnelles à* $\frac{s.cs}{sg^3}$, *on demande le moment des forces* ($\frac{s.cs}{sg^3} - \frac{s}{cs^2}$) *par rapport à un plan perpendiculaire à la ligne* CS, *& dont* CI *est supposée la commune section avec le plan* PpS, *ou, ce qui revient au même, en menant* gV *perpendiculaire au plan* PpS, *&* Vi *perpendiculaire à* CI ; *on demande la somme des* $G'g \times GG' \times (\frac{s.cs}{sg^3} - \frac{s}{cs^2}) \times Ci$.

Solution. Soit menée gL parallele à $C'V$, & CL perpendiculaire au plan PSp, & soient nommées

kC' . . . . f
$G'g$ . . . . ϵ
l'angle $kC'g$ X
son Sinus gL . . . . $f\,\text{Sin.}\,X$
CC' . . . . q'
la ligne SC qui est censée constante . . . . u
l'angle PCS V
& par conséquent son Sinus & son Cosinus . . .
. . . . Sin. V & Cos. V

Cela posé, il est visible 1° que $G'g \times GG' = \epsilon f\, dX$. 2°. Qu'au lieu de Sg^3, on pourra sans erreur sensible mettre SV^3. 3°. Que Ci (Fig. 3) $= CI - Ii = CI - C'O = CC' \times \text{Sin.}\,V - C'V \times \text{Cos.}\,V$. 4°. Que $SV^2 = SC'^2 + C'V^2 + 2C'V \times SL = SC^2 + CC'^2 + 2CC' \times CL + C'V^2 + 2C'V \times SL = u^2 + q'q' + 2q'u\,\text{Cos.}\,V$

$+ ff(\text{Sin. } X)^2 + 2uf \text{ Sin. } X \text{ Sin. } V$; donc négligeant les termes f^2 (Sin. X^2) & $q'q'$ qui sont nuls par rapport aux autres, on a $SV = V(uu + 2q'u \text{ Cos. } V + 2fu \text{ Sin. } X \text{ Sin. } V)$; d'où l'on tire l'équation suivante ; $\frac{S . CS}{SV^3} - \frac{S}{CS^2} = -\frac{3S}{u^3} \times (q' \text{ Cos. } V + f \text{ Sin. } X \text{ Sin. } V)$: donc la différentielle à intégrer est . . . .
$-\frac{3Sf\,\mathit{c}\,dX}{u^3} \times (q' \text{ Cosinus } V + f \text{ Sinus } X \times \text{Sinus } V)$
$\times (q' \text{ Sin. } V - f \text{ Sin. } X \text{ Cos. } V)$. On prendra l'intégrale de maniére qu'elle soit $= 0$, lorsque $X = 0$, & ensuite il faudra faire $X =$ à quatre angles droits, ou à $4D$ pour avoir l'intégrale qu'on demande. D'où il s'ensuit, qu'il faut négliger dans la différentielle tous les termes où dX se trouveroit multiplié par Cos. X ou Cos. $2X$, ou Sin. X ou Sin. $2X$ &c. parce que l'intégrale de ces termes est nulle lorsque $X = 0$, & lorsque $X = 4$ droits. Donc à cause de $(\text{Sin. } X)^2 = \frac{1}{2} - \frac{\text{Cos. } 2X}{2}$ (*art.* 5), la différentielle à intégrer, sera simplement . . . . .
$-\frac{3Sf\,\mathit{c}\,dX}{u^3} \times (q'q' \text{ Cos. } V. \text{ Sin. } V - \frac{ff}{2} \text{ Cos. } V. \text{ Sin. } V)$
dont l'intégrale, quand $X = 4$ droits, est $-\frac{3 . 4Sf\,\mathit{c}\,D}{u^3} \times$ Cos. V. Sin. $V (q'q' - \frac{ff}{2})$.

REMARQUE.

8. On peut encore trouver d'une autre maniére la

somme des $\frac{G'g \times GG' \times S . CS . Ci}{Sg^3} - \frac{G'g \times GG' \times S . Ci}{CS^2}$: soit nommée kL, x, on aura $G'g \times GG' = \frac{\mathcal{C} f dx}{\sqrt{[2fx - xx]}}$, & supposant q le Sinus de l'angle PCS, & k le Cosinus de ce même angle, on trouvera facilement que $\frac{1}{SV^3} = \frac{1}{u^3} - \frac{3}{u^4} (kq' + q\sqrt{[2fx - xx]})$. Donc la somme des $\frac{G'g \times GG' \times S . CS . Ci}{SV^3} - \int \frac{G'g . GG' . S.}{CS^2} \times Ci$ $= \int (\frac{\mathcal{C} f dx}{\sqrt{[2fx - xx]}} \times [3q\sqrt{[2fx - xx]} + 3kq'] \times \frac{S}{u^3} \times$ $[-qq' + k\sqrt{[2fx - xx]}])$; on peut même remarquer ici en passant, que par la propriété du centre de gravité C, $\int \frac{G'G \times G'g . Ci . S}{CS^2} = 0$: de plus, si on prend un point γ tel $K\gamma = KG$, on trouvera le moment de ce point en mettant $-\sqrt{[2fx - xx]}$ au lieu de $\sqrt{[2fx - xx]}$ dans l'expression précédente, sans changer le signe de $\frac{+dx}{\sqrt{[2fx - xx]}}$. Donc la somme des momens cherchés, sera . . . .
$= -\frac{S}{u^3} \times 3\mathcal{C}f \times (\int \frac{2kqq'q'dx}{\sqrt{[2fx - xx]}} - 2\int kq dx . \sqrt{[2fx - xx]}$
$= -\frac{3S\mathcal{C}f}{u^3} (2kqq'q'\pi - qk\pi ff)$ en appellant 2π le rapport de la circonférence au rayon. Or $q = \text{Sin.}\ V$; $k =$ Cos.

Cof. V; $2\pi = 4D$. Donc cette expreſſion s'accorde avec la précedente.

COROL. I.

9. Soit $2a$ l'Axe Pp de la terre (Fig. 2), pC', b; $a + a\alpha$ le rayon de l'Equateur, α étant une petite quantité qui marque la différence des Axes dans l'hypotheſe de la terre homogene, on aura $ff = 2ab - bb$, $q' = a - b$, $\beta = \alpha f$, & l'intégrale précedente ſe changera en

$$- \frac{3S\alpha \cdot 4D}{u^3} \times \text{Cof.}\, V \times \text{Sin.}\, V \times [[a-b]^2 (2ab - bb) - (\frac{2ab-bb}{2})^2] = - \frac{3S\alpha\, \text{Sin.}\, V \cdot \text{Cof.}\, V \times 4D}{u^3} \times [[a-b]^2 \times (aa - [a-b]^2) - (\frac{aa - [a-b]^2}{2})^2].$$

COROL. II.

10. Pour avoir maintenant le moment total de la croute ou double Méniſque qui environne le globe, il faut multiplier la quantité précedente par db, & en prendre l'intégrale de maniére qu'elle ſoit $= 0$ quand $b = 0$: ce qui donnera

$$- \frac{3S\alpha \cdot \text{Sin.}\, V \cdot \text{Cof.}\, V \cdot 4D}{u^3} \times [- aa \frac{(a-b)^3}{3} + \frac{a^5}{3} + \frac{[a-b]^5}{5} - \frac{a^5}{5} - \frac{a^4 b}{2} - \frac{2aa\,(a-b)^3}{2 \cdot 3} + \frac{2a^5}{3 \cdot 2} + \frac{[a-b]^5}{5 \cdot 2} - \frac{a^5}{5 \cdot 2}].$$

Donc lorſque

$b = 2a$, cette intégrale devient $-\frac{3Sa\ \text{Sin.}\ V.\ \text{Cof.}\ V.\ 4D}{u^3} \times -\frac{4a^5}{15}$.

COROL. III.

11. Nous avons prouvé ci-deffus, que la force réfultante des forces des points k parallélement à CS, doit être dans le plan PSp; & de plus, il eft évident que cette force doit avoir une direction parallele à CS, & qu'elle doit être = à la fomme des forces des points k. Soit donc Ψ cette force, $H\lambda$ (Fig. 4) fa direction dans le plan PSp, $CH = L$, la perpendiculaire $C\lambda$ fera $= L$ Sin. V; & l'on aura par les principes de la ftatique, $\Psi \times L$ Sin. V = à l'intégrale trouvée à la fin du Corol. précedent. Donc $\Psi . L = \frac{3Sa\ .\ \text{Cof.}\ V.\ 4D}{u^3} \times \frac{4a^5}{15}$.

REMARQUE.

12. Nous n'aurons befoin dans les calculs fuivans, que de la valeur de $\Psi \times L$ fans celle de Ψ & de L; cependant on peut remarquer en paffant que $\Psi = 0$, & que par conféquent L eft infinie. Car l'intégrale de $-\frac{3SfGdX}{u^3} \times (q'$ Cofinus $V + f$ Sinus $X \times$ Sinus $V)$ eft $-\frac{3Sa\ \text{Cof.}\ V.\ 4D}{u^3}(a-b)ff$: or cette quantité étant multipliée par db, & enfuite intégrée, eft $= 0$, lorfque $b = 0$, & lorfque $b = 2a$.

COROLL. IV.

13. Si la terre n'étoit pas ſuppoſée un Sphéroide homogene, mais qu'elle fût compoſée de couches dont les rayons fuſſent f, les ellipticités φ ou en général αF, F étant une fonction de f, & les denſités Δ, alors $\Psi \times L$ feroit $= \frac{3S \cdot 4D \text{ Coſ. } V}{3} \times \frac{4}{15} \int \Delta d (f^5 \varphi) = \frac{4\alpha}{15} \int \Delta d (f^5 F) \times \frac{3S \cdot 4D}{u^3} \times$ Coſ. V; & en général il eſt très-facile de voir que $\Psi \times L$ fera toujours proportionnel à $3S \times \frac{4D \times \text{Coſ. } V}{15 u^3}$, quel que ſoit le ſolide $PpQK$, pourvû qu'il ſoit un ſolide de révolution peu différent d'une Sphére ; car la quantité $\frac{3S \times 4D}{u^3} \times$ Coſ. V. Sin. V multiplie tous les termes de la différentielle, & eſt traitée comme conſtante dans l'intégration. C'eſt pourquoi on peut en général ſuppoſer $\Psi \times L = \frac{3A \times 4D \times \text{Coſ. } V \times S}{15 u^3}$, A étant une quantité qui dépend de l'applatiſſement & de la denſité des différentes couches du Sphéroide ; & on remarquera que S repréſente ici la maſſe du ſoleil, & u ſa diſtance à la terre.

COROLL. V.

14. Soit CL (Fig. 4) le rayon où ſe trouve la Lune dans ſon orbite, lorſque le Soleil eſt en S : ſoit menée parallelement à CL la ligne $H'\lambda'$, qui repréſente la direction de la force réſultante de l'Attraction lunaire;

il eſt viſible qu'en nommant Ψ' cette force, CH', L', λ la maſſe de la Lune, CL, u', l'angle PCL, V'; on aura $\Psi' L' = \frac{A \times 4 D \times \text{Coſ.}\, V' . 2\lambda}{35\, u'^3}$; & on remarquera que CL ne ſe trouve dans le plan PSp, que lorſque la Lune eſt dans les nœuds.

PROBLÊME II.

15. *Imaginons qu'on faſſe paſſer par* SC, (Fig. 5) *un plan* SCeE *qui repréſente l'écliptique, & que* Ee, CM, hs, h'l *ſoient la projection des lignes* Pp, CL, Hλ, H'λ' *ſur ce plan; on demande l'équation entre le Coſinus de* PCS *& celui de* ECS, *& entre le Coſinus de* LCP, *& celui de* MCE.

1°. Soit nommé l'angle ECS, v, & ſoit menée par le point h, qui eſt la projection du point H, (Fig. 6) la ligne $h\epsilon$ perpendiculaire à CS, il eſt facile de voir que $H\epsilon$ ſera auſſi perpendiculaire à CS ou $C\epsilon$. Car on aura $H\epsilon^2 + C\epsilon^2 = Hh^2 + h\epsilon^2 + C\epsilon^2 = Ch^2 + Hh^2 = CH^2$. Donc le Coſinus de l'angle ϵCp ou SCP ſera au Coſinus de l'angle ECS ou ϵCh, comme $\frac{\epsilon C}{CH} : \frac{\epsilon C}{Ch}$; donc en appellant y le Coſinus de l'angle pCe ou HCh, on aura Coſ. V : Coſ. v :: Ch : CH :: y : 1. Donc Coſ. $V = y$ Coſ. v.

2°. Soit CL (Fig. 7) le rayon dans lequel la Lune eſt ſuppoſée ſe trouver, & qui (*hyp.*) eſt diſtant de

l'Ecliptique de la quantité LM, soit P le Pôle de la terre, PK la perpendiculaire abbaissée du Pôle P sur le plan de l'écliptique CMK, $K\sigma$ une perpendiculaire à CM, PR perpendiculaire à CR, & RQ perpendiculaire à CM, ou, ce qui revient au même, parallele à LM; ayant joint KS, soit appellée μ la tangente de l'angle σKQ, l'angle $KC\sigma$, v', p la tangente de l'angle LCM, & soit comme ci-dessus $CP = 1$, $CK = y$, l'angle $PCR = V'$, on aura CR ou Cos. $V = CQ \times \sqrt{[1 + pp]} = \sqrt{[1 + pp]} \times (C\sigma + \sigma Q) = (y \text{ Cos. } v' + y\mu \text{ Sin. } v') \sqrt{[1 + pp]}$; or $CR^2 + RP^2 = CP^2 = 1$, & $RP^2 = KQ^2 + (PK - RQ)^2 = (1 + \mu\mu) \cdot yy \text{ Sin. } v'^2$ (†) $+ (\sqrt{[1 - yy]} - yp \text{ Cos. } v' - y\mu p \text{ Sin. } v')^2$. On aura donc une équation d'où l'on tirera la valeur de μ en p, y, & v'; mais pour faire le calcul de la maniére la plus simple, on remarquera que p doit toujours être une petite quantité, parce que l'orbite de la Lune fait un petit angle avec le plan de l'Ecliptique, & que μ doit être aussi une petite quantité, puisque μ seroit $= 0$, si p étoit $= 0$. C'est pourquoi on se contentera de prendre dans l'équation $CR^2 + RP^2 = 1$, les termes où m & p se rencontrent sans être

(†) Cette expression Sin. v^2, ou Cos. v^2, ou en général Sin. A^2 & Cos. A^2, A étant un angle quelconque, désignera toujours dans la suite le quarré du Sinus de l'angle A, ou de son Cos. & non le Sinus du quarré, comme on pourroit être porté à le croire par l'expression même qui sert à le désigner, & que nous avons choisie comme plus commode.

ni multipliés l'un par l'autre, ni élevés au quarré, ce qui donnera yy Cof. $v'^2 + 2yy\mu'$ Cof. v' Sin. $v' + yy$ Sin. $v'^2 + 1 - yy - 2yp$ Cof. $v'\sqrt{[1-yy]} = 1$; donc $\mu = \frac{p\sqrt{[1-yy]}}{y \text{ Sin. } v'}$; donc puifque l'on a Cof. $V' = (y$ Cof. $v' + y\mu$ Sin. $v')\sqrt{[1+pp]}$, comme nous l'avons vû plus haut; il s'enfuit que Cof. $V' = (y$ Cof. $v' + p \times \sqrt{[1-yy]}) \times \sqrt{[1+pp]}$. *Ce Q. F. Tr.*

Nous avons fuppofé dans la Figure 7, que les points L & P étoient au-deffus du plan de l'Ecliptique; au lieu que dans la Figure 5, ils font au-deffous. C'eft toute la différence qu'il y a entre ces deux Figures: d'où il s'enfuit, que fi on appelle y le Cofinus de l'angle pCe (Fig. 5), l'angle LCP, V', l'angle MCE, v', & la perpendiculaire LM, p, on aura de même le Cofinus de $V' = (y$ Cof. $v' + p\sqrt{[1-yy]}) \times \sqrt{[1+pp]}$.

Remarque I.

16. Il n'eft pas difficile de voir que la valeur de μ doit être conftante, quelle que foit la pofition du point P (Fig. 7) dans l'Arc PL, la ligne CL reftant fixe; car les lignes KP, PR demeurant toujours paralleles à elles-mêmes, la commune fection KQ du plan KPR avec le plan KCM, fait toujours le même angle avec CM, & par conféquent fait auffi toujours le même angle $QK\sigma$ avec la perpendiculaire $K\sigma$ à CM; d'où il s'enfuit, que la tangente μ de ce dernier angle eft conf-

tante. Cependant elle ne l'eſt point dans notre équation : car $\sqrt{[1 - yy]}$ n'eſt pas exactement en raiſon conſtante avec y Sin. v' ; il faudroit pour cela que p fut $= 0$. Mais comme p eſt fort petit, il s'enſuit que $\frac{\sqrt{[1 - yy]}}{y \text{ Sin. } v'}$ eſt à peu près conſtant, & cela ſuffit pour donner la valeur approchée de μ, qui eſt tout ce qu'on cherche ici.

REMARQUE II.

17. Imaginons dans le plan $ESCe$ (Fig. 8) une perpendiculaire Zz à Ee, & ſur cette perpendiculaire un plan ZOz, auſſi perpendiculaire à Ee ; prolongeons enſuite les lignes $H\lambda$, $H'\lambda'$ juſqu'à ce qu'elles rencontrent ce plan en a, a', je dis que ſi on mene dans le plan ZOz la ligne Cbb' perpendiculaire à Zz, & qu'on tire ab', $a'b$; ad, $a'd'$ perpendiculaires à Cb, & à Cd, on aura 1°. $ad = Hh$; car $H\lambda a$ étant (*hyp.*) parallele au plan EZe, les perpendiculaires Hh, ad à ce plan feront égales. 2°. ab ou $Cd = \frac{Cb \times \text{Sin. } v}{\text{Coſ. } v}$: car l'angle $Chd = v$, puiſque hd eſt évidemment la projection de $H\lambda a$; 3°. ſi la ligne $H'\lambda'$ étoit parallele au plan EZe, on trouveroit de même $a'd' = H'h'$, & Cd' ou $a'b' = \frac{Cb' \times \text{Sin. } v'}{\text{Coſ. } v'}$; mais comme $H'\lambda'$ n'eſt pas parallele au plan EZe, menons par le point H' (Fig. 9) une ligne $H'a''$ parallele à ce plan, qui rencontrera $d'a'$ en a'', & il eſt

évident que $H'a''$ fera $=$ & parallele à $h'd'$, que $a''d'$ fera $=$ & parallele à $H'h'$, que $h'd' = \frac{Ch'}{\text{Cof. } v'} = \frac{L'.y}{\text{Cof. } v'}$; & que $\frac{a'a''}{H'a''} = \frac{LM}{CM} = p$. Donc $a'd' = a''d - a''a' = H'h' - h'd' \times p$.

COROLL. I.

18. Donc confervant les noms donnés ci-deffus, on aura ad (Fig. 10) $= L\sqrt{[1 - yy]}$; ab ou $Cd = Ly \times \frac{\text{Sin. } v}{\text{Cof. } v}$; $Cd' = L'y \frac{\text{Sin. } v'}{\text{Cof. } v'}$; $a'd' = L'\sqrt{[1 - yy]} - \frac{L'yp}{\text{Cof. } v'}$.

COROLL. II.

19. Donc au lieu des puiffances fuivant $H\lambda$, & $H'\lambda'$; (Fig. 8) on peut fuppofer au point a (Fig. 10) une puiffance qui tire parallélement à hd, & au point a' une puiffance qui tire parallélement à $h'd'$, & une autre qui tire fuivant $a'd'$. La premiere de ces puiffances fera $= \Psi$ (*art.* 11); la feconde $=$ (*art.* 14) $\frac{\Psi'}{\sqrt{[1 + pp]}}$; que je nomme Ψ'' pour abréger; la troifiéme fera $\Psi'' p$.



CHAPITRE

CHAPITRE II.

Propositions de Géometrie & Méchanique, nécessaires pour la solution du Probléme.

PROBLÉME III.

20. SOIENT ECe, (Fig. 11) ZCz, *deux lignes perpendiculaires l'une à l'autre, &* CE′ *une ligne perpendiculaire au plan de ces deux-là, ensorte que* E′Ce, E′Cz, *soient deux plans perpendiculaires l'un à l'autre, &, au plan* eCz. *On suppose que le point* Q *du plan* E′Cz, *soit tiré perpendiculairement à ce plan par une puissance* G, *& que le point* G *du plan* E′Ce *soit tiré perpendiculairement au plan* E′Ce *par une puissance* F, *& l'on propose de changer ces puissances en deux autres qui n'agissent que sur le seul plan* E′Cz; *c'est-à-dire, qui agissent sur des points placés dans ce plan.*

Soient menées les lignes QP' & QD perpendiculaires à Cz & à CE', & GE', GH perpendiculaires à CE' & à Ce; supposons de plus $QP' = \xi$, $DQ = \chi$, $GH = \zeta$, $GE' = \theta$. Soit menée ensuite la ligne $E'F$ parallele à Cz, qui rencontre CQ prolongée en F, & soit achevé le parallélogramme $E'FKG$. Il est certain par les élémens de la Méchanique, qu'au lieu de la puissance G qui agit au point Q, on peut en substituer deux autres en F, & en C, qui agissent parallélement

à la puissance G, dont la somme soit égale à G, & qui soient entr'elles en raison de CQ à QF. Donc la puissance placée en F & agissant suivant FK, sera $= \frac{G \times CQ}{CF} = \frac{G \times CD}{CE'} = \frac{G\xi}{\zeta}$, & la puissance qui agit suivant Ce sera $G - \frac{G\xi}{\zeta}$. Or la puissance $\frac{G\xi}{\zeta}$ qui agit suivant FK ou Kf, & la puissance F, qui agit suivant GK ou Kk, se réduisent à une seule suivant Kn ou NK, le point N étant tel que $FN : FK :: F : \frac{G\xi}{\zeta}$; l'on peut donc supposer deux puissances appliquées au point N, l'une parallele à FK ou Ce & $= \frac{G\xi}{\zeta}$, l'autre parallele à GK, & agissant suivant NF, laquelle soit $= F$. Or si on tire CN, & qu'on prolonge QD jusqu'à ce qu'elle rencontre CN en B, il est visible que la puissance $\frac{G\xi}{\zeta}$ appliquée en N, & la puissance $G - \frac{G\xi}{\zeta}$ appliquée en C suivant Ce, qui sont entr'elles, comme on l'a vu, en raison de CQ à QF, ou de CD à DE', sont aussi par conséquent en raison de CB à BN. Donc ces deux puissances peuvent se réduire à une seule placée au point B, qui soit $= G$, & qui agisse parallélement à Ce.

Donc les deux puissances proposées se réduisent à deux autres, dont l'une agit parallélement à Ce sur le point B placé dans le plan $E'Cz$, & l'autre sui-

vant NE' ſur le point E' placé dans le même plan. La premiere de ces puiſſances eſt $= G$; la ſeconde eſt $= F$. *Ce Q. F. Tr.*

COROLLAIRE I.

21. Puiſque $FN : FK$ ou $GE' :: F : \frac{G\xi}{\zeta}$, on aura $FN = \frac{F.\theta.\zeta}{G\xi}$; de plus $FE' = \frac{QD \times GH}{QP'} = \frac{\chi\zeta}{\xi}$; donc $E'N = \frac{F.\theta.\zeta}{G\xi} - \frac{\chi\zeta}{\xi}$; donc BD ou $\frac{F'N \times \xi}{\zeta} = \frac{F.\theta}{G} - \chi$.

Donc ſi on tire par le point B une ligne $BL =$ & parallele à QP', on aura $BL = \xi$; & ſi on nomme BD, ϱ, on aura $\varrho = \frac{F.\theta}{G} - \chi$; de plus CE' qui eſt $=$ à GH, ſera ζ; & l'on ſe ſouviendra que les points B, E' ſont ceux où les puiſſances G & F ſont maintenant appliquées.

COROLL. II.

22. Imaginons préſentement, que tandis que le point E' (Fig. 12) eſt tiré ſuivant $E'F$ par la puiſſance F, & que le point B eſt tiré perpendiculairement au plan $E'Cz$ par la puiſſance G, le point V du plan eCz ſoit tiré perpendiculairement au plan eCz par une puiſſance $= \Pi$; enſorte que menant les perpendiculaires $V\pi$, VR, on ait $CR = \mu$, $C\pi = \nu$; on propoſe de réduire ces trois puiſſances à d'autres qui agiſſent ſur des points placés dans le plan $E'Cz$.

Ayant joint VL, il eſt viſible que la puiſſance G qui agit en B parallélement à $C\pi$ ou RV peut ſe décompoſer en deux autres, l'une parallele à LV, l'autre parallele à RL; la premiere de ces puiſſances ſera $= \frac{G \times LV}{RV}$, la ſeconde $= \frac{G \times LR}{RV}$. Or $LR = \mu + \varrho$, puiſque BD ou $CL = \varrho$, & $CR = \mu$; donc auſſi $LV = \sqrt{[\nu\nu + (\mu + \varrho)^2]}$; donc la puiſſance G parallele à $C\pi$, & agiſſant ſur le point B ſe change en deux autres, dont l'une $\frac{G\sqrt{[\nu^2 + (\mu + \varrho)^2]}}{\nu}$ agit ſur ce point B parallélement à LV, l'autre $\frac{G(\mu + \varrho)}{\nu}$ agit ſur ce même point ſuivant BT dans le prolongement de DB.

Maintenant, ſoit Bg (Fig. 13) la direction de la puiſſance qui agit au point B parallélement à LV, & Vl la direction de la puiſſance que j'ai nommé Π, & qui eſt perpendiculaire à LV; il eſt viſible que de ces deux puiſſances il en réſulte une ſuivant lh ou $Z'l$, telle que BZ' eſt à LV ou $\sqrt{[\nu^2 + (\mu + \varrho)^2]}$ comme Π eſt à $\frac{G\sqrt{[\nu^2 + (\mu + \varrho)^2]}}{\nu}$; donc $BZ' = \frac{\Pi \nu}{G}$, & $LZ' = \xi - \frac{\Pi . \nu}{G}$. Donc le point Z' qui eſt tiré ſuivant $Z'l$, peut être cenſé tiré parallélement à LV par une force égale à $\frac{G\sqrt{[\nu^2 + (\mu + \varrho)^2]}}{\nu}$, & ſuivant $Z'B$ par une force $= \Pi$.

Donc au lieu des trois puiſſances propoſées, on

peut en subſtituer quatre autres ; dont la 1re F (Fig. 12) agiſſe au point E' ſuivant $E'F$, la ſeconde $\frac{G(\mu+\varrho)}{\nu}$ agiſſe au point B ſuivant BT, la troiſiéme $\frac{G\sqrt{[\nu^2+(\mu+\varrho)^2]}}{\nu}$ agiſſe au point Z' parallélement à LV, & enfin la quatriéme Π agiſſe au point Z' ſuivant $Z'B$. *Ce Q. F. Tr.*

Coroll. III.

23. Imaginons préſentement dans le plan $E'Zz$ (Fig. 14) deux points a, a' tels que ceux dont nous avons parlé dans le Chapitre précedent, dont l'un a ſoit tiré par une puiſſance $= \Delta$, parallélement à une ligne hd qui fait avec Ce l'angle $Chd = v$, & dont l'autre a' ſoit tiré ſuivant $a'd'$ par une puiſſance $= \Gamma$, & tiré de plus par une puiſſance $= \Omega$, parallélement à une ligne $h'd'$ qui faſſe avec Ce l'angle $Ch'd' = v'$: ſoit fait $Cb = \xi'$, $ab = \chi'$, $Cb' = \zeta'$, $a'b' = \theta'$; ſuppoſons enfin, que les puiſſances qui tirent les points a, a', faſſent équilibre à celles qui agiſſent ſur les points B, E', Z déterminés dans le Corol. précedent : on demande la loi de l'équilibre entre ces puiſſances.

Soit tirée par le point C (Fig. 15) dans le plan eCz la ligne Cn qui faſſe avec Ce, un angle $= v$; il eſt viſible que la puiſſance qui tire le point a ſera parallele à nC. Or ſoit O le point où la ligne VL coupe Cn, il eſt évident que la puiſſance qui tire le point a

peut se décomposer en deux autres; dont l'une agisse parallélement à Og, & l'autre parallélement à gn, & que la premiere de ces puissances sera $= \frac{\Delta \times Og}{On}$, la $2^{de} = \frac{\Delta \times gn}{On}$: donc la $1^{re} = \frac{\Delta \times VL}{Vm}$, & la $2^{de} = \frac{\Delta \times Lm}{Vm}$, en menant Vm parallele à Cn. Or $Lm = LR - Rm = \mu + \varrho - \frac{r \text{ Sin. } v}{\text{Cos. } v}$, & $Vm = \frac{r}{\text{Cos. } v}$. Donc le point a est tiré parallélement à LR par une puissance égale à $\frac{\Delta \left(\mu + \varrho - \frac{r \text{ Sin. } v}{\text{Cos. } v}\right)}{r} \times \text{Cos. } v$, & parallélement à VL par une puissance $= \frac{\Delta \sqrt{[r^2 + (\mu + \varrho)^2]} \text{Cos. } v}{r}$. On verra de même que le point a' est tiré parallélement à LR par une force $= \frac{\Omega \left(\mu + \varrho - \frac{r \text{ Sin. } v'}{\text{Cos. } v'}\right)}{r} \times \text{Cos. } v'$, & parallélement à VL par une force $= \frac{\Omega \text{ Cos. } v' \sqrt{[(\mu + \varrho) + r^2]}}{r}$: la question se réduit donc à celle-ci.

Soient a, (Fig. 16) a', Z', B, E' cinq points dans le plan $E'Zz$, tels que CE' & BZ' soient perpendiculaires à Zz, & soient tirés ces points par neuf puissances; savoir le point a suivant ab par une force $= \Delta'$, le point a' suivant $a'b'$ par une force $= \Omega'$, & suivant $a'd'$ par une force $= \Gamma$, le point B suivant BT par une

force $= G'$, le point E' ſuivant $E'F$ par une force $= F$, le point Z' ſuivant $Z'B$ par une force $= K$; enfin, les points a', a, Z' chacun par une force parallele à une ligne donnée de poſition & placée hors du plan $E'Zz$: il faut trouver la loi de l'équilibre entre toutes ces puiſſances.

Il eſt évident que les puiſſances paralleles à la ligne donnée de poſition, qui agiſſent ſur les points Z', a, a', doivent être en équilibre entr'elles, indépendamment des autres, parce que ces puiſſances ne ſont pas comme les autres dans le plan $E'Zz$. Delà il eſt très-facile de conclure, que la force qui tire le point Z', doit être $=$ à la ſomme des forces qui tirent les points a, a', & que de plus, les forces qui tirent les points a, a' doivent être entr'elles en raiſon de $a'Z'$ à aZ', & que les points a', a, Z' doivent être en ligne droite. Donc ſi on appelle Z' la puiſſance qui agit ſur le point Z; a, celle qui agit ſur le point a, & a' celle qui agit ſur le point a, on aura 1°. $a + a' = Z'$; 2°. $Z' \times Z'L = a \times ad + a' \times a'd'$; 3°. $Z' \times CL = a \times Cd + a' \times Cd'$.

Maintenant, puiſque les points b, b', E', ſont tirés (*hyp.*) parallélement à Cz par des forces Δ', Ω', F; il s'enſuit qu'au lieu de ces trois forces, on peut en ſubſtituer une ſeule $= \Delta' + \Omega' + F$ qui agiſſe ſuivant RX, (Fig. 17) parallélement à Cz, & qui ſoit telle que $CR \times (\Delta' + \Omega' + F) = \Delta' \times Cb + \Omega' \times Cb' + F \times CE'$; or cette puiſſance combinée avec la puiſſance K qui agit ſuivant $Z'B$ ou BK, ſe réduit à une ſeule

puiſſance qui agit ſuivant une certaine ligne QG : de même la puiſſance G' qui agit ſuivant BT, ou TO étant combinée avec la force Γ qui agit ſuivant $a'd'$, ſe réduit à une ſeule puiſſance qui agit ſuivant une certaine ligne Tg ; & comme (*hyp.*) il y a équilibre entre les puiſſances a, a', Z', G', Δ', Ω', F, Γ, K, & que les puiſſances a, a', Z', ſont déja en équilibre entr'elles, il s'enſuit que les ſix autres puiſſances ſont auſſi en équilibre. Donc les puiſſances ſuivant QG & ſuivant Tg qui en réſultent, doivent être en équilibre entr'elles, c'eſt-à-dire qu'elles doivent être égales & directement oppoſées. Donc 4°. $\Gamma = K$. 5°. $G' = \Delta' + \Omega' + F$. 6°. BQ doit être à BT, comme K eſt à $\Delta' + \Omega' + F$; c'eſt-à-dire $(Cd' - CL) \times K = (\Delta' + \Omega' + F) \times (CR - LB) = \Delta' \times Cb + \Omega' \times Cb' + F \times CE' - G' \times LB$. Ces trois équations jointes avec les trois précedentes, renferment la loi d'équilibre cherchée. *Ce Q. F. Tr.*

Coroll. IV.

24. Par le Corollaire précedent, la puiſſance a (Figure 16) $= \frac{\Delta \sqrt{[r^2 + (\mu + \varrho)^2]} \cdot \text{Coſ.}\, v}{r}$, la puiſſance $a' = \frac{\Omega\, \text{Coſ.}\, v' \sqrt{[r^2 + (\mu + \varrho)^2]}}{r}$; de plus par le Corol. 2. la puiſſance $Z' = \frac{G \sqrt{[r^2 + (\mu + \varrho)^2]}}{r}$; d'où il s'enſuit que la premiere des ſix équations du Corol. précedent, ſe changera

changera en celle-ci, Δ Cof. $v + \Omega$ Cof. $v' = G$ ......
& fi on fuppofe que les puiffances Δ, Ω, foient comme dans l'*art.* 19. Ψ' & Ψ'', on aura . . . .
Ψ Cof. $v + \Psi'' \times$ Cof. $v' = G$ . . . . (A)
De même à caufe de $Z' = \frac{G\sqrt{[y^2 + (\mu + \xi)^2]}}{y}$, de $LZ' = \xi - \frac{\Pi . y}{G}$ (*art.* 22), de $ad = L\sqrt{[1 - yy]}$ (*art.* 18), & de $a'd' = L'\sqrt{[1 - yy]} - \frac{L'yp}{\text{Cof. } v'}$, on aura au lieu de la feconde équation $\frac{G\xi}{y} - \Pi = \frac{\Delta . L\sqrt{[1-yy]}}{y} \times$ Cof. $v +$ $\frac{\Omega}{y} (L'\sqrt{[1 - yy]} - \frac{L'yp}{\text{Cof. } v'}) \times$ Cof. v': ou $G\xi - \Pi . y = \Psi \times$ Cof. $v . L\sqrt{[1 - yy]} + \Psi''$ Cof. $v' . L'\sqrt{[1 - yy]} -$ $\Psi'' L'py$ . . . . (B)
Par la même raifon, à caufe de $CL = BD = \frac{F . \theta}{G} - \chi$, (*article* 21), de $Cd = \frac{Ly \text{ Sin. } v}{\text{Cof. } v}$, & de $Cd' = \frac{L'y \text{ Sin. } v'}{\text{Cof. } v'}$, (*art.* 18); on aura $\frac{G}{y} \times (\frac{F . \theta}{G} - \chi) = \frac{\Psi \text{ Cof. } v}{y} \times \frac{Ly \text{ Sin. } v}{\text{Cof. } v} +$ $\frac{\Psi' \text{ Cof. } v'}{y} \times \frac{L'y \text{ Sin. } v'}{\text{Cof. } v'}$; ou $F . \theta - G . \chi = \Psi . Ly$ Sin. $v +$ $\Psi'' . L'y$ Sin. v' . . . . (C)
L'équation $\Gamma = K$ fe réduira de même à $\Psi'' p = \Pi$ . . (D) car $\Pi = K$ (*article* 22 & 23) ; & (*art.* 19 & 23) $\Gamma = \Psi'' p$.

De même l'équation $G' = \Delta' + \Omega' + F$ fe changera en

celle-ci ; $\frac{G(\mu+\varrho)}{,} = \frac{\Psi\,(\mu+\varrho-\frac{,\,\text{Sin.}\,v}{\text{Cos.}\,v})\,\text{Cos.}\,v}{,} +$

$\frac{\Psi''\,(\mu+\varrho-\frac{,\,\text{Sin.}\,v'}{\text{Cos.}\,v'})\,\text{Cos.}\,v'}{,} + F$ . . . . . :

ou, substituant la valeur de G tirée de l'équation A,
$F = \Psi\,\text{Sin.}\,v + \Psi''\,\text{Sin.}\,v'$ . . . . (E)
Enfin, la derniere équation se change en $K\,\times$

$$\left(\frac{L'y\,\text{Sin.}\,v'}{\text{Cos.}\,v'}-\frac{F\,.\,\theta}{G}+\chi\right)=F\,.\,\zeta-\frac{G(\mu+\varrho)}{,}\times\xi+$$

$$[\Psi\,\text{Cos.}\,v\,\frac{(\mu+\varrho)}{,}-\Psi\,\text{Sin.}\,v]\times L\sqrt{[1-yy]}+$$

$$[\Psi''\,\text{Cos.}\,v'\,\frac{(\mu+\varrho)}{,}-\Psi''\,\text{Sin.}\,v']\times$$

$$[L'\sqrt{[1-yy]}-\frac{L'yp}{\text{Cos.}\,v'}].$$

Si on met dans cette équation à la place de K sa valeur Π ou $\Psi''\,p$, à la place de $G\xi$ sa valeur tirée de l'équation B, & à la place de $\frac{F\theta}{G}-\chi$ sa valeur ϱ; (*article* 21) on aura . . . .
$F.\zeta-\Pi\,.\,\mu=\Psi\,\text{Sin.}\,v\,.\,L\sqrt{[1-yy]}+\Psi''.\,L'\,\text{Sin.}\,v'\times$
$\sqrt{[1-yy]}$. . . . . (F)

PROBLEME IV.

25. *Soit* Pp (Fig. 18) *une ligne dont la projection sur le plan* ZEe *soit* Ee; Zz *une ligne perpendiculaire.*

à E e *dans le plan* Z E e, C E' *une ligne perpendiculaire au plan* Z E e, C' K *une ligne menée perpendiculairement à* C p *par un point quelconque* C' *de la ligne* C p, *& dans le plan* E' C p, K G *un Arc de cercle décrit d'un rayon quelconque* C K', G L *le Sinus de cet Arc, &* G V *son Cosinus,* γ *la projection du point* G *sur le plan* E Z e : *on demande l'expression analytique de la distance* G γ *du point* G *au plan* Z E e, *de la distance* γ Q *du point* γ *à la ligne* C e, *& enfin de la distance* γ O *ou* Q C *du point* γ *à la ligne* C z.

Soit comme dans l'*art.* 15, y le Cosinus de l'angle pCe, & comme dans l'*art.* 7, l'angle $KC'G = X$, son rayon $KC' = f$, le Sinus $GL = f$ Sin. X & $GV = f \times$ Cosin. X, $Cp = a$, $C'p = b$; il est évident que le plan $KC'G$ étant (*hyp.*) perpendiculaire à Cp, & l'angle $KC'V$ étant droit, la ligne $C'V$ est perpendiculaire aux lignes KC', $C'p$, & par conséquent au plan $E'Cp$. Donc $C'V$ est parallele à Cz; aussi-bien que GL : donc 1°. $\gamma Q = GL = f$ Sin. X; 2°. $G\gamma = LQ$. Or menant $C'q$ perpendiculaire à Ce, & $C'i$ perpendiculaire à LQ, on aura $LQ = Li + iQ = C'q + C'L \times y = (a-b) \sqrt{[1-yy]} + f$ Cosin. $X \cdot y$; 3°. Enfin CQ ou $Cq - C'i = (a-b)y - f$ Cos. $X \sqrt{[1-yy]}$. *Ce Q. F. Tr.*

COROLL. I.

26. Donc si on suppose que la ligne Cp change infiniment peu de position, ensorte que sa projection au

lieu d'être Ce soit Ce' (Fig. 19), que q' soit la projection du point C', l'angle eCe' étant infiniment petit, & γ' la projection du point G, (Fig. 18) la ligne $C'V'$ restant toujours parallele au plan ZEe, il est évident qu'on aura 1°. $\gamma'Q'$ (Fig. 19) $= f$ Sin. X; 2°. la distance du point G (Figure 18) au plan de projection, $= (a-b) \sqrt{[1-y'y']} + fy'$ Cos. X, y' étant ce que devient y lorsque Cp change de position. 3°. CQ' (Fig. 19) $= (a-b)y' - f$ Cos. $X \sqrt{[1-y'y']}$; donc en faisant $y' = y + dy$, la distance du point G (Fig. 18) au plan EZz, sera $(a-b)\sqrt{[1-yy]} - \frac{ydy\,(a-b)}{\sqrt{[1-yy]}} +$ fy Cos. $X + fdy$ Cos. X, & CQ' (Fig. 19) $= (a-b) \times$ $y + (a-b)\,dy - f$ Cos. $X \sqrt{[1-yy]} + \frac{fydy \text{ Cos. } X}{\sqrt{[1-yy]}}$.

COROLL. II.

27. Si on mene par les points, γ, γ' des paralleles γv, $\gamma' V'$ à Cq', & qu'on prolonge $Q'\gamma'$ jusqu'en i, il sera facile de trouver l'expression analytique des lignes γi, $\gamma' i$. Car en premier lieu, nommant l'angle eCe', $d\epsilon$, on aura $qR = Cq \times d\epsilon = d\epsilon\,(a-b)\,y$, $Vv = \gamma V \times d\epsilon = f \times$ Cos. $X \sqrt{[1-yy]} \times d\epsilon$. Donc Rv ou $q'v'$ qui est censée lui être égale, parce qu'elle n'en différe que d'un infiniment petit du second ordre, est $yd\epsilon\,(a-b) + f \times$ Sin. $X - fd\epsilon$ Cos. $X \sqrt{[1-yy]}$: or $q'V'$ ou $Rl = f \times$ Sin. X; donc lv ou $\gamma' i = yd\epsilon\,(a-b) - fd\epsilon$ Cos. $X \times$ $\sqrt{[1-yy]}$. En second lieu, menant Rt parallele à

Mq', on aura $\gamma v' = \gamma v + vv' = \gamma V + ut + Rq' = f \times$ Cof. $X \sqrt{[1-yy]} + f$ Sin. $X \times dt + dy\,(a-b)$; donc puifque $\gamma' V' = f$ Cof. $X \sqrt{[1-y'y']}$, ou $f \times$ Cof. $X \sqrt{[1-yy]} - \frac{fydy \text{ Cof. } X}{\sqrt{[1-yy]}}$, on aura $\gamma i = (a-b) \times dy + fdt$ Sin. $X + \frac{fydy \text{ Cof. } X}{\sqrt{[1-yy]}}$. *Ce Q. F. Tr.*

COROLL. III.

28. Suppofons préfentement, que lorfque l'Axe Cp eft arrivé dans fa nouvelle pofition où il a Cq' pour projection, & où γ' eft la projection du point G (Fig. 19) le cercle $KC'G$ perpendiculaire à Cp (Fig. 18) fe meuve autour de cet Axe d'un mouvement angulaire, tel que tous les points de fa circonférence parcourent un angle dP; il eft évident que le point G avancera fuivant GH de la quantité fdP, & que la projection de ce point G qui étoit en γ' (Fig. 20), fe trouvera en un point γ'' tel que $\gamma'' i' = fdP$ Cof. X, & $\gamma' i' = fdP$ Sin. $X \times \sqrt{[1-yy]}$. Donc $\gamma i'' = \frac{f \text{ Cof. } X \,.\, ydy}{\sqrt{[1-yy]}} + (a-b)\,dy + fdt$ Sin. $X + fdP$ Sin. $X \sqrt{[1-yy]}$, & $\gamma'' i'' = -ydt\,(a-b) + fdt$ Cof. $X \sqrt{[1-yy]} + fdP \times$ Cof. X.

COROLL. IV.

29. Lorfque le point γ eft parvenu en γ', la diftance du point γ' au point dont il eft la projection, eft (*art.* 26).

$(a-b)\sqrt{[1-y'y']}+fy'$ Cof. X ; mais lorfque le γ' eft parvenu en γ'', l'angle X eft augmenté de la quantité dP, & par conféquent Cof. X devient Cof. $X - dP$ Sin. X ; donc tandis que le point γ parvient de γ en γ'', fa diftance au point dont il eft la projection devient $(a-b)\sqrt{[1-yy]}+fy$ Cof. $X-\frac{(a-b)ydy}{\sqrt{[1-yy]}}+fdy\times$ Cof. $X-fydP$ Sin. X.

COROLL. V.

30. Suppofons donc que pendant l'inftant dt le point q (Fig. 20) vienne en q', & le point γ' en γ'', il eft clair que le point G dont les points γ, γ'' font fucceffivement la projection, parcourt durant l'inftant dt, l'efpace fdy Cof. $X-fydP$ Sin. $X-\frac{ydy(a-b)}{\sqrt{[1-yy]}}$ perpendiculairement au plan de projection, & qu'il tend à s'éloigner de ce plan, de cette quantité ; que de plus, il parcourt l'efpace $\gamma i''=\frac{fydy \text{ Cof. } X}{\sqrt{[1-yy]}}+(a-b)dy+fdt\times$ Sin. $X+fdP$ Sin. $X\sqrt{[1-yy]}$ parallélement à Ce', & l'efpace $i''\gamma''=-ydt(a-b)+fdt$ Cof. $X\times\sqrt{[1-yy]}+fdP$ Cof. X perpendiculairement à cette même ligne Ce'.

COROLL. VI.

31. Suppofons enfuite que durant un fecond inftant égal au premier dt (Fig. 21) la ligne Ce' parvienne

en Ce'', enforte que l'angle $e''Ce' = d\epsilon + dd\epsilon$, & que dy devienne $dy + ddy$, & que durant ce même tems le point G (Fig. 18) décrive autour du centre C un angle $= dP + ddP$; il eſt viſible que pendant ce ſecond inſtant, le point G parcourra perpendiculairement au plan de projection, & en s'en éloignant, l'eſpace $fdy \times$ Coſ. $X + fddy$ Coſ. $X - fdydP$ Sin. $X - fydP \times$ Sin. $X - fdydP$ Sin. $X - fyddP$ Sin. $X - fydP^2 \times$ Coſ. $X - (a-b) \times (\frac{ydy}{\sqrt{[1-yy]}}) - (a-b)\, d(\frac{ydy}{\sqrt{[1-yy]}})$; qu'il parcourra parallélement à Ce'' l'eſpace . . . . . . $\frac{f \text{Coſ.} X . ydy}{\sqrt{[1-yy]}} - \frac{fdP \text{Sin.} X . ydy}{\sqrt{[1-yy]}} + f$ Coſ. $X d(\frac{ydy}{\sqrt{[1-yy]}}) + (a-b)\, dy + (a-b)\, ddy + fd\epsilon$ Sin. $X + fdd\epsilon \times$ Sin. $X + fd\epsilon dP$ Coſ. $X + fdP$ Sin. $X \sqrt{[1-yy]} + fddP$ Sin. $X \sqrt{[1-yy]} + fdP^2$ Coſ. $X \sqrt{[1-yy]} - \frac{fdP . \text{Sin.} X . ydy}{\sqrt{[1-yy]}}$, & parallélement à Ce'' l'eſpace $-yd\epsilon \times (a-b) - dyd\epsilon\, (a-b) - ydd\epsilon\, (a-b) + fd\epsilon \times$ Coſ. $X \sqrt{[1-yy]} + fdd\epsilon$ Coſ. $X \sqrt{[1-yy]} - fd\epsilon dP$ Sin. $X \sqrt{[1-yy]} - \frac{fd\epsilon \text{Coſ.} X . ydy}{\sqrt{[1-yy]}} + fdP \times$ Coſ. $X - fdP^2$ Sin. $X + fddP$ Coſ. X.

COROL. VII.

32. Si on mene par les points γ, γ'', les lignes $\gamma\zeta$, $\gamma''\zeta$ paralleles & perpendiculaires à Ce''; il eſt facile de voir que $\gamma\zeta = \gamma i'' - i''\kappa = \gamma i'' - \gamma'' i'' \times d\epsilon$, &

que $\gamma''\zeta = \gamma'' i'' + u\zeta = \gamma'' i'' + \gamma i'' \times d\epsilon$. Donc dans le premier instant dt la viteſſe du point G paralléle-ment à Ce'', ſera $\frac{fydy \text{ Coſ. } X}{dt\sqrt{[1-yy]}} + \frac{(a-b)dy}{dt} + \frac{fd\epsilon \text{ Sin. } X}{dt} + \frac{fdP \text{ Sin. } X\sqrt{[1-yy]}}{dt} + \frac{d\epsilon^2}{dt} \times y(a-b) - \frac{fd\epsilon^2 \text{ Coſ. } X\sqrt{[1-yy]}}{dt} - \frac{fdPd\epsilon \text{ Coſ. } X}{dt}$, & la viteſſe de ce même point perpendi-culairement à Ce'', ſera $-\frac{yd\epsilon(a-b)}{dt} + \frac{fd\epsilon \text{ Coſ. } X\sqrt{[1-yy]}}{dt} + \frac{fdP \text{ Coſ. } X}{dt} + \frac{fd\epsilon \text{ Coſ. } X \cdot ydy}{dt\sqrt{[1-yy]}} + \frac{dyd\epsilon(a-b)}{dt} + \frac{fd\epsilon^2 \text{ Sin. } X}{dt} + \frac{fdPd\epsilon \text{ Sin. } X\sqrt{[1-yy]}}{dt}$.

LEMME III.

33. *Soit une verge* P C p (Fig. 18) *de longueur donnée, & fixe en ſon point de milieu* C, *je dis que pour trouvèr le mouvement de cette verge autour du centre* C, *il ſuffit de trouver le mouvement de ſa projection* C e′ *ſur un plan de poſition donnée* E Z z.

Car connoiſſant à chaque inſtant la poſition de la ligne Ce, & ſa grandeur, on aura facilement la poſition du point p, puiſque $pe = \sqrt{[Cp^2 - Ce^2]}$. Donc &c.

COROLLAIRE I.

34. Si on ſuppoſe que PCp ſoit l'Axe d'un corps de figure quelconque, dont C ſoit le centre de gravité, & que

que $KC'V$ ſoit la coupe de ce corps par un plan perpendiculaire à ſon Axe, ou une partie de cette coupe, KC' ſe trouvant dans le plan $E'Cpe$; il eſt certain que quelque mouvement qu'on donne à la verge PCp, la ſituation du plan $K'CV$ ſera toujours déterminée, dès qu'on aura la poſition du point C' & de la ligne PCp, puiſque ce plan $KC'V$ eſt toujours perpendiculaire à l'Axe PCp. Mais la poſition des différens points du plan $KC'V$ ne ſera pas déterminée pour cela. En effet, il peut arriver de deux choſes l'une, ou que la ligne KC' ſe trouve toujours dans le plan qui joint la ligne fixe $E'C$, & la verge PCp, & qui change à chaque inſtant de poſition par le mouvement de la verge, ou que la ligne KC' ne s'y trouve pas, & que par conſéquent $C'H$ ne demeure pas parallele au plan EZz. Dans le premier cas, dès que la poſition de la ligne Cp ſera donnée, on connoîtra celle du point K, & par conſéquent de tous les autres points du corps. Dans le ſecond cas, il faut ſçavoir de plus l'angle que fait la ligne KC' qui étoit dans le plan $E'Cp$ au premier inſtant avec celle qui ſe trouve dans ce même plan, lorſqu'il a changé de ſituation. Or comme toutes les parties du corps conſervent toujours la même poſition les unes par rapport aux autres, il s'enſuit que cet angle eſt celui que décrit autour de l'Axe PCp un plan quelconque paſſant par cet Axe, ou que décrit autour du centre C' un point quelconque G. Donc pour avoir la ſituation de toutes les parties du corps à chaque inſtant, il ſuffit de connoî-

tre 1°. la situation & la grandeur de la projection Ce de l'Axe Cp, ce qui renferme deux indéterminées. 2°. l'angle que décrit à chaque instant un point quelconque G autour du centre C', angle que nous avons nommé dP, & qui feroit $= 0$, si la ligne KC' demeuroit toujours dans le plan $E'Cp$, ou ce qui est la même chose, si la ligne $C'H$ demeuroit toujours parallele au plan EZz.

COROLL. II.

35. Donc si on appelle $d\epsilon$ l'angle que décrit la ligne Ce à chaque instant dt, qu'on fasse $Cp = 1$, $Ce = y$, & qu'enfin on nomme dP l'angle de rotation du point G autour de C', comme ci-dessus; la connoissance du mouvement du corps autour de son centre à chaque instant dépendra de celle des trois indéterminées & variables, y, $d\epsilon$, dP.

COROLL. III.

36. Nous avons supposé jusqu'ici, que le centre C étoit fixe ; mais s'il avoit quelque mouvement, il est clair que ce mouvement ne changeroit rien à celui des parties du corps par rapport au centre C, puisque le mouvement de ce point, ne feroit que transporter toutes les parties du corps, suivant des lignes paralleles & égales à celle que décrit le centre C. Or quelle que soit la vitesse & la direction imprimée à chaque instant au centre C, on peut toujours la décomposer en deux

autres, dont l'une ſoit perpendiculaire au plan EZz, l'autre ſoit dans ce même plan, & cette derniere peut de rechef ſe décompoſer en deux autres, l'une ſuivant Ce, l'autre perpendiculaire à Ce; forces dont la direction change à chaque inſtant, puiſque Ce change à chaque inſtant de poſition. Ainſi la connoiſſance du mouvement inſtantané du centre C dépend de la détermination de trois nouvelles variables.

LEMME IV.

37. *Soit un corps qui ſe meuve d'un mouvement quelconque, & dont toutes les parties aient chacune une viteſſe différente repréſentée par l'indéterminée* u *dans un inſtant quelconque: ſoient auſſi tant de forces accélératrices qu'on voudra*, Ψ, Ψ', &c. *qui agiſſent ſur ce corps, & en vertu deſquelles la viteſſe* u *que chaque partie a dans un inſtant quelconque, ſoit changée l'inſtant ſuivant en une autre viteſſe* u', *différente pour chaque partie. Je dis que ſi on regarde la viteſſe* u *comme compoſée de la viteſſe* u' *& d'une autre viteſſe* u'', *qui eſt infiniment petite; le ſyſtême de toutes les parties du corps, animées chacune de la viteſſe* u'' *doit être en équilibre avec les forces* Ψ, Ψ', &c.

Cette propoſition n'eſt autre choſe que le principe général, dont j'ai déduit dans mon *Traité de Dynamique* la ſolution de tous les Problêmes qui appartiennent à cette ſcience. On peut en voir la démonſtration Ch. 1. de la ſeconde partie de cet Ouvrage; mais afin qu'on

ne ſoit pas obligé d'y avoir recours, je la rappellerai ici en peu de mots.

Dans l'inſtant où la viteſſe u, ſe change en la viteſſe u', & où chaque particule eſt animée par les forces Ψ, Ψ', &c. qui tendent à lui donner les viteſſes Ψdt, $\Psi' dt$; on peut regarder cette particule comme tendante à ſe mouvoir avec les viteſſes u', u'', Ψdt, $\Psi' dt$, ſuivant différentes directions. Or (*hyp.*) elle ne prend réellement de toutes ces viteſſes, que la ſeule viteſſe u'. Donc il faut que les viteſſes u'', Ψdt, $\Psi' dt$ qui animent chaque partie, ſoient telles, qu'il n'en réſulte aucun mouvement. Donc &c. *Ce Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

38. Si un corps tourne autour de ſon centre de gravité C de la maniére qu'il a été expliqué dans l'*art.* 34, & qu'en même tems ce centre décrive une ligne quelconque, il eſt certain que la viteſſe inſtantanée de chaque particule ſera compoſée de deux viteſſes; l'une qui ſera égale & parallele à celle du centre C, l'autre qui ſera la viteſſe de rotation de cette partie autour du même centre. Donc ſi on appelle v la viteſſe du centre C dans un inſtant quelconque, v' ſa viteſſe dans l'inſtant ſuivant, n la viteſſe indéterminée de rotation de chaque particule autour du centre C dans le premier de ces deux inſtans, n' ſa viteſſe de rotation dans l'inſtant ſuivant, & qu'on regarde la viteſſe v comme compoſée des viteſſes v', v'', & la viteſſe n comme compoſée des viteſſes

n', n'', il faudra que le ſyſtême de toutes les particules animées chacune de la viteſſe n'', & d'une viteſſe égale & parallele à la viteſſe v'' ſoit en équilibre avec les forces Ψ, Ψ', &c.

COROLL. II.

39. Soit Cp l'Axe du corps, & Ce (Fig. 21), Ce', Ce'' les poſitions ſucceſſives de la projection de l'Axe au commencement d'un inſtant quelconque dt, à la fin de cet inſtant, & à la fin du ſuivant ; la viteſſe v'' peut être décompoſée en trois autres, la premiere perpendiculaire au plan EZz, la ſeconde perpendiculaire à Ce'', la troiſiéme parallelle à Ce'' ; & chacune de ces viteſſes peut être exprimée par $\Pi' dt$, $F' dt$, $G' dt$: de même on peut décompoſer la viteſſe n, & la viteſſe n' chacune en trois autres ; ſçavoir α, α', paralleles à Ce'', β, & β', paralleles à la perpendiculaire ſur Ce'', menée dans le plan EZz, & ω, ω' perpendiculaires au plan EZz ; d'où il s'enſuit que la viteſſe n'' eſt compoſée des viteſſes $\alpha - \alpha'$, $\beta - \beta'$, & $\omega - \omega'$. Donc le ſyſtême de toutes les particules du corps, animées chacune des viteſſes $\Pi' dt$, $F' dt$, $G' dt$, & $\alpha - \alpha'$, $\beta - \beta'$, $\omega - \omega'$ doit être en équilibre avec les forces Ψ, Ψ', &c.

COROLL. III.

40. Soit nommée μ' chaque particule du corps ; il eſt certain 1°. que les forces Π' & $\frac{\omega - \omega'}{dt}$ qui animent

qui agiſſent ſur des points a, a' placés dans le plan $E'C\zeta$, l'une pour tirer le point a' ſuivant $a'd'$, perpendiculairement à $\zeta\zeta'$, l'autre pour tirer les points a, a' ſuivant des lignes paralleles au plan $e''\zeta\zeta'$, ſoit que ces lignes ſoient paralleles entr'elles ou non ; on aura, en conſervant les noms de l'*art.* 23 *& ſuiv.* la loi d'équilibre entre ces puiſſances, renfermées dans les ſix équations de l'*art.* 24, qu'il eſt inutile de répéter ici.

COROLL. V.

42. Soit $\alpha'' = \alpha - \alpha'$, $\beta'' = \beta - \beta'$, $\omega'' = \omega - \omega'$, π la diſtance de chaque particule au plan $e''\zeta\zeta'$, ϖ ſa diſtance au plan $E'Ce''$, ϱ' ſa diſtance au plan $E'C\zeta$, on aura par les principes de ſtatique, ...

$$G \,.\, \xi = \int \mu' \times G' \times \pi + \int \frac{\mu'\alpha''\pi}{dt}$$

$$G \,.\, \chi = \int \mu' \times G' \times \varpi + \int \frac{\mu'\alpha''\pi}{dt}$$

$$F \,.\, \zeta = \int \mu' \times F' \times \pi + \int \frac{\mu'\beta''\pi}{dt}$$

$$F \,.\, \theta = \int \mu' \times F' \times \varrho' + \int \frac{\mu'\beta''\varrho'}{dt}$$

$$\Pi \,.\, \nu = \int \mu' \times \Pi' \times \varrho' + \int \frac{\mu'\omega''\varrho'}{dt}$$

$$\Pi \,.\, \mu = \int \mu' \times \Pi' \times \varpi + \int \frac{\mu'\omega''\pi}{dt}$$

Or par la propriété du centre de gravité, $\int \mu'\pi = 0$, $\int \mu'\varpi = 0$, $\int \mu'\varrho = 0$. Donc puiſque les forces G', F, Π'

ſont les mêmes dans chaque particule, il s'enſuit que l'on aura $G . \xi = \int \frac{\mu'\alpha''\pi}{dt}$; $G . \chi = \int \frac{\mu'\alpha''\varpi}{dt}$, $F . \zeta = \int \frac{\mu'\beta''\pi}{dt}$; $F . \theta = \int \frac{\mu'\beta''\xi'}{dt}$, $\Pi . \nu = \int \frac{\mu'\omega''\xi'}{dt}$; $\Pi . \mu = \int \frac{\mu'\omega''\varpi}{dt}$. Donc mettant ces valeurs de $G . \xi$, $G . \chi$, &c. dans les équations B, C, F de l'*art.* 24, elles ſe changeront en celles-ci :

$$\int \frac{\mu'\alpha''\pi}{dt} - \int \frac{\mu'\omega''\xi'}{dt} = \Psi \text{ Coſ. } v . L \sqrt{[1 - yy]} + \Psi'' \text{ Coſ. } v' \times L' \sqrt{[1 - yy]} - \Psi'' Lpy \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (G)$$

$$\int \frac{\mu'\beta''\xi'}{dt} - \int \frac{\mu'\alpha''\varpi}{dt} = \Psi L y \text{ Sin. } v + \Psi' . L'y \text{ Sin. } v' \; . \; . \quad (H)$$

$$\int \frac{\mu'\beta''\pi}{dt} - \int \frac{\mu'\omega''\varpi}{dt} = \Psi . L . \text{ Sin. } v . \sqrt{[1 - yy]} + \Psi'' \times L' \text{ Sin. } v' . \sqrt{[1 - yy]} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (K)$$

& les trois autres équations feront . . . . . .

$$\Psi \text{ Coſ. } v + \Psi'' \text{ Coſ. } v' = M \times G' + \int \frac{\mu'\alpha''}{dt} \quad . \; . \quad (L)$$

$$\Psi'' p = M \times \Pi' + \int \frac{\mu'\omega''}{dt} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (M)$$

$$\Psi \text{ Sin. } v + \Psi'' \text{ Sin. } v' = M \times F' + \int \frac{\mu'\beta''}{dt} \; . \; . \; . \; . \quad (N)$$



CHAPITRE

CHAPITRE III.

Solution du Problême de la précession des Equinoxes.

PROBLÊME V.

43. *La terre étant supposée un Sphéroide homogene solide & peu applati, formé par la révolution d'une Ellipse autour de son petit Axe, on demande le mouvement que doit produire dans ce Sphéroide, l'action du Soleil & de la Lune sur la croute ou double Ménisque, qui est la différence du Sphéroide & du globe inscrit.*

Solution. On aura d'abord par l'*art.* 11, $\Psi . L = \frac{4as}{15} \times \frac{3S\alpha \text{ Cos. } V \times 4D}{u^3} =$ (*art.* 15) $\frac{4as \,.\, 3S\alpha y \text{ Cos. } v \,.\, 4D}{15 u^3}$; & $\Psi .'' L' =$ (*art.* 19) $= \frac{\Psi' . L'}{\sqrt{[1 + pp]}}$, c'est-à-dire, en négligeant le quarré de la quantité très-petite pp, $\Psi'' . L' = \Psi' . L' =$ (*art.* 14) $\frac{4as}{15} \times \frac{3\lambda\alpha \text{ Cos. } V' \times 4D}{u'^3} = \frac{4as \,.\, 3\lambda\alpha y \text{ Cos. } v'}{15 u'^3} \times 4D + \frac{4as \,.\, 3\lambda\alpha p \sqrt{[1 - yy]} \,.\, 4D}{15 u'^3}$ (*art.* 15).

En second lieu, si on conserve les mêmes noms que dans l'*article* 40, on aura $\mu' = db \times fdX \times df$, df, exprimant la largeur infiniment petite $G'g$ de la couronne $KGQK$ (Fig. 2); enfin, on aura suivant l'*art.* 42 & l'*art.* 29, $\pi = y'f$ Cos. $(X + dP) + (a - b) \times$

$\surd[1-y'y']$, ou ce qui revient au même ici, $yf \times$ Cof. $X + (a-b)\surd[1-yy]$, parce que π doit être multiplié par la quantité infiniment petite μ'; par la même raifon $\varpi = f$ Sin. X, & $\varrho' = (a-b)\,y - f$ Cof. $X \times \surd[1-yy]$; enfin fuivant les *articles* 31, 32 & 42, on trouvera $dt\,(\alpha - \alpha')$ ou $\alpha''\,dt = -f$ Cof. $X \times d\,(\frac{ydy}{\surd[1-yy]}) + \frac{fdP\,.\,ydy\,\text{Sin.}\,X}{\surd[1-yy]} - ddy\,(a-b) - fdd\epsilon \times$ Sin. $X - fd\epsilon dP$ Cof. $X - fddP$ Sin. $X\surd[1-yy] - fdP^2$ Cof. $X\surd[1-yy] + \frac{f.\,\text{Sin.}\,X\,.\,dP\,.\,ydy}{\surd[1-yy]} + yd\epsilon^2 \times (a-b) - fd\epsilon^2$ Cof. $X\surd[1-yy] - fdPd\epsilon$ Cof. X; $dt\,(\beta - \beta')$ ou $\beta''dt = \frac{2fd\epsilon\,.\,ydy\,.\,\text{Cof.}\,X}{\surd[1-yy]} + dyd\epsilon\,(a-b) + fd\epsilon^2$ Sin. $X + fdPd\epsilon$ Sin. $X\surd[1-yy] + ydd\epsilon \times (a-b) + d\epsilon dy\,(a-b) - fdd\epsilon$ Cof. $X\surd[1-yy] + fd\epsilon dP$ Sin. $X\surd[1-yy] - fddP$ Cof. $X + fdP^2 \times$ Sin. X: enfin, $dt\,(\omega - \omega')$, ou $\omega''dt = -fddy$ Cof. $X + 2fdydP$ Sin. $X + fyddP$ Sin. $X + (a-b) \times d\,(\frac{ydy}{\surd[1-yy]}) + fydP^2$ Cof. X.

On fubftituera maintenant toutes ces valeurs dans les fix équations de l'*article* 42; mais on pourra abréger le calcul par les remarques fuivantes.

1°. On rejettera dans les différentielles $\mu'\alpha''\pi$, $\mu'\alpha''\varpi$, &c. tous les termes qui renferment des Sin. ou Cofin. de X ou de $2X$, par la raifon que l'intégrale de ces termes, lorfque $X = 4$ droits, eft $= 0$, comme on l'a

vû dans l'*art.* 7. De cette maniére, on aura : . . .
$\int\mu'\alpha''\pi = \int(\int dfdXdb) \times (\frac{ff}{2}) \times [-yd(\frac{ydy}{\sqrt{[1-yy]}}) - 2yd\varepsilon dP - ydP^2\sqrt{[1-yy]} - yd\varepsilon^2\sqrt{[1-yy]}] + \int\int dfdXdb \times (a-b)^2 \times (-ddy\sqrt{[1-yy]} + yd\varepsilon^2 \times \sqrt{[1-yy]})$ . . . . :

$\int\mu'\alpha''\varpi = \int\int dfdXdb \times \frac{ff}{2} \times (\frac{2ydydP}{\sqrt{[1-yy]}} - dd\varepsilon - ddP \times \sqrt{[1-yy]})$ . . . . :

$\int\mu'\omega''\varrho' = \int\int dfdXdb \times \frac{ff}{2} \times (ddy\sqrt{[1-yy]} - ydP^2 \times \sqrt{[1-yy]}) + \int\int dfdXdb \times (a-b)^2 \times (yd\frac{ydy}{\sqrt{[1-yy]}})$;

$\int\mu'\omega''\varpi = \int\int dfdXdb \times \frac{ff}{2} \times (2dydP + yddP)$;

$\int\mu'\beta''\varrho' = \int\int dfdXdb \times (a-b)^2 \times (2ydyd\varepsilon + yydd\varepsilon) + \int\int dfdXdb \times \frac{ff}{2} \times (-2ydyd\varepsilon + (1-yy)dd\varepsilon + ddP\sqrt{[1-yy]})$ . . . . :

$\int\mu'\beta''\pi = \int\int dfdXdb \times \frac{ff}{2} \times (\frac{2yydyd\varepsilon}{\sqrt{[1-yy]}} - ydd\varepsilon \times \sqrt{[1-yy]} - yddP) + \int\int dfdXdb \times (a-b)^2 \times (2dyd\varepsilon\sqrt{[1-yy]} + ydd\varepsilon\sqrt{[1-yy]})$.

Or afin de ſubſtituer plus aiſément ces valeurs dans les équations de l'*article* 42, on remarquera que pour avoir $\int\int dfdXdb \times \frac{ff}{2}$, il faut prendre d'abord l'intégrale de $dfdb \times \frac{f^2}{2}dX$, en regardant df & db com-

me constantes, ce qui donnera $dfdb \times f^3 \times 2D$, dont l'intégrale en regardant db comme constante, est $\frac{f^4 D \times db}{2}$. Or $f^2 = (2ab - bb) \times (1 + \alpha)^2$ (*article* 9); donc $\int \frac{db \times Df^4}{2} = \frac{D(1+\alpha)^4}{2} \times \int db\,[aa - (a-b)^2]^2 = (1+\alpha)^4 \times [\frac{Da^4b}{2} + \frac{Daa(a-b)^3}{3} - \frac{Da^5}{3} - \frac{D}{2}\frac{(a-b)^5}{5} + \frac{Da^5}{2.5}] =$ lorsque $b = 2a$, à $\frac{4a^5}{15} \times 2D \times (1 + 4\alpha + 6\alpha\alpha + 4\alpha^3 + \alpha^4)$. On trouvera de même $\int f df d X db (a-b)^2 = \int db\,(a-b)^2 \times ff \times 2D = \int db\,(a-b)^2 \times 4D \times (1+\alpha)^2 \times [\frac{aa-(a-b)^2}{2}] =$ lorsque $b = 2a$, $\frac{4a^5}{15} \times 2D \times (1 + 2\alpha + \alpha\alpha)$. Donc négligeant les termes qui renferment le quarré de α, & les puissances plus hautes, on aura au lieu des équations G, H, K, de l'*article* 42, les trois suivantes . . . .

$$\frac{6S\alpha y dt^2 \text{ Cos. } v^2 \sqrt{[1-yy]}}{u^3} + \frac{6\lambda\alpha y dt^2 \text{ Cos. } v'^2 \sqrt{[1-yy]}}{u'^3} + \left(\frac{6\lambda\alpha p \text{ Cos. } v'(1-yy)}{u'^3} - \frac{6\lambda\alpha pyy \text{ Cos. } v'}{u'^3}\right) dt^2 = (2+6\alpha) \times [-yd(\frac{ydy}{\sqrt{[1-yy]}}) - ddy\sqrt{[1-yy]}] + (1+4\alpha) \times -2yd\epsilon dP - 2\alpha \times yd\epsilon^2 \sqrt{[1-yy]} \; . \; . \; . \; . \; (P)$$

$$\frac{3S\alpha yydt^2 \text{ Sin. } 2v}{u^3} + \frac{3\lambda\alpha yydt^2 \text{ Sin. } 2v'}{u'^3} + \frac{6\lambda\alpha ydt^2 p \text{ Sin. } v' \sqrt{[1-yy]}}{u'^3} = -2\alpha d\,(yyd\epsilon) + 2(1+4\alpha)\,(dd\epsilon + ddP \times$$

$\sqrt{[1-yy]} - \frac{ydydP}{\sqrt{[1-yy]}}) \ldots \ldots \ldots (Q)$

$\frac{3S\alpha y d\varepsilon^2 \text{ Sin. } 2v \sqrt{[1-yy]}}{u^3} + \frac{3\lambda\alpha y d\varepsilon^2 \text{ Sin. } 2v' \sqrt{[1-yy]}}{u'^3} +$

$\frac{6\lambda\alpha p d\varepsilon \text{ Sin. } v' \times [1-yy]}{u'^3} = 2(1+4\alpha) \times (\frac{yydyd\varepsilon}{\sqrt{[1-yy]}}) -$
$yddP - dydP) - 2\alpha \times (ydd\varepsilon \sqrt{[1-yy]}) +$
$(1+2\alpha) \times 2d\varepsilon dy \sqrt{[1-yy]} \ldots \ldots (R)$

Si on multiplie la feconde de ces équations par $\frac{\sqrt{[1-yy]}}{y}$, & qu'on la compare enfuite à la troifiéme, il viendra $-2\alpha d(yyd\varepsilon) \times \frac{\sqrt{[1-yy]}}{y} + \frac{2\sqrt{[1-yy]}}{y} \times (1+4\alpha) \times$
$(dd\varepsilon + ddP\sqrt{[1-yy]} - \frac{ydydP}{\sqrt{[1-yy]}} = 2(1+4\alpha) \times$
$[\frac{yydyd\varepsilon}{\sqrt{[1-yy]}} - yddP - dydP] - 2\alpha \times ydd\varepsilon\sqrt{[1-yy]} +$
$(1+2\alpha) \times (2d\varepsilon dy \sqrt{[1-yy]})$ qui fe réduit à $-$
$4\alpha dyd\varepsilon \sqrt{[1-yy]} - 2\alpha ydd\varepsilon \sqrt{[1-yy]} +$
$\frac{2dd\varepsilon\sqrt{[1-yy]}}{y} + \frac{8\alpha dd\varepsilon\sqrt{[1-yy]}}{y} + 2(1+4\alpha) \times$
$(\frac{ddP}{y} - yddP - dydP) = 2(1+4\alpha) \times (\frac{yydyd\varepsilon}{\sqrt{[1-yy]}} -$
$yddP - dydP) - 2\alpha ydd\varepsilon\sqrt{[1-yy]} + (1+2\alpha) \times$
$2d\varepsilon dy\sqrt{[1-yy]}$. D'où l'on tire $2(1+4\alpha)\frac{ddP}{y} =$
$2d\varepsilon dy \sqrt{[1-yy]} + \frac{2yydyd\varepsilon}{\sqrt{[1-yy]}} - \frac{2dd\varepsilon\sqrt{[1-yy]}}{y} +$

$\frac{8yydyd\epsilon\,.\,\alpha}{\sqrt{[1-yy]}} + 8\alpha d\epsilon dy \sqrt{[1-yy]} - \frac{8\alpha dd\epsilon\sqrt{[1-yy]}}{y} =$

$2(1+4\alpha)\frac{dyd\epsilon}{\sqrt{[1-yy]}} + 2(1+4\alpha) \times - \frac{dd\epsilon\sqrt{[1-yy]}}{y}$;

ou enfin $ddP = - dd\epsilon \sqrt{[1-yy]} + \frac{ydyd\epsilon}{\sqrt{[1-yy]}}$; dont l'intégrale est $dP = - d\epsilon \sqrt{[1-yy]}$ + une constante infiniment petite dZ.

Cette constante dZ est évidemment proportionnelle au tems dt qui est supposé constant; donc si on suppose que la terre se meuve d'un mouvement uniforme autour du Soleil, & que durant le tems dt elle parcoure l'angle dz, on pourra supposer $dZ = kdz$, k exprimant une constante indéterminée. Donc $dP = d\epsilon \times \sqrt{[1-yy]} + kdz$: il faut donc substituer cette valeur de dP dans les deux équations P & Q; mais avant de faire cette substitution, on remarquera 1°. que si on appelle g la vitesse de la Terre autour du Soleil à la distance u que l'on regarde comme constante, on aura $dt = \frac{udz}{g}$; que de plus, gg est à très-peu près égal à $\frac{S}{u^2} \times u$, parce que l'orbite de la terre différe peu d'un cercle; d'où il s'ensuit, que $dt^2 = \frac{u^2dz^2}{S} \times u$. Donc $\frac{Sdt^2}{u^3} = dz^2$; 2°. que $\frac{\lambda dt^2}{u'^3} = \frac{\lambda}{u'^3} \times \frac{u^3}{S} \times \frac{Sdt^2}{u^3} = \frac{\lambda}{u'^3} \times \frac{u^3}{S} \times dz^2$: donc si on fait $\frac{\lambda}{u'^3} \times \frac{u^3}{S} = 1 + 6$, on aura $\frac{\lambda dt^2}{u'^3} =$

$(1+\mathcal{E})\,dz^2$; 3°. que si on appelle m' la tangente de l'inclinaison de l'orbite lunaire, & ζ le Sinus de la distance du lieu de la Lune dans l'Ecliptique, au nœud ascendant, on aura $p = -m'\zeta$; je mets $p = -m'\zeta$, parce que nous avons supposé que la Lune étoit au-dessous du plan de l'Ecliptique, d'où il s'ensuit que le Sinus ζ de sa distance au nœud ascendant est négatif, parce que cette distance est plus grande que 180°; or la quantité p a été supposée positive dans le calcul; il faut donc faire $p = -m'\zeta$, afin que $-m'\zeta$ soit aussi positif; 4°. que $-yd\left(\frac{ydy}{\sqrt{[1-yy]}}\right) - ddy\sqrt{[1-yy]} = -\frac{ddy}{\sqrt{[1-yy]}} - \frac{ydy^2}{(1-yy)^{\frac{3}{2}}}$: donc la premiere équation (P) deviendra . . . .

$$3ydz^2.\alpha\ \text{Cos}.\ v^2\sqrt{[1-yy]} + 3y\alpha dz^2\,(1+\mathcal{E}) \times \text{Cos}.\ v'^2 \times \sqrt{[1-yy]} - 3\alpha\,(1+\mathcal{E})\,\text{Cos}.\ v'.\ m'\zeta \times (1-2yy)\,dz^2 = (1+3\alpha)\times\left(-\frac{ddy}{\sqrt{[1-yy]}} - \frac{ydy^2}{(1-yy)^{\frac{3}{2}}}\right) + (1+3\alpha)\,ydt^2\sqrt{[1-yy]} + (1+4\alpha)\times -kydtdz:$$

or on remarquera dans cette équation, que $-\frac{ddy}{\sqrt{[1-yy]}} - \frac{ydy^2}{(1-yy)^{\frac{3}{2}}}$, est la différence de $-\frac{dy}{\sqrt{[1-yy]}}$, & comme y est le Cosinus de l'angle que l'Axe de la terre fait avec le plan de l'Ecliptique, il s'ensuit que si on appelle π cet angle, on aura $d\pi = \frac{-dy}{\sqrt{[1-yy]}}$; $dd\pi = \frac{-ddy}{\sqrt{[1-yy]}} -$

$-\frac{ydy^2}{(1-yy)^{\frac{3}{2}}}$; $y = \text{Cof. } \pi$; $\sqrt{[1-yy]} = \text{Sin. } \pi$. Donc l'équation précedente fe changera en . . . . .

$$dd\pi = \frac{3\alpha \text{ Cof. } v^2 \text{ Sin. } \pi \text{ . Cof. } \pi \times dz^2}{1+3\alpha}$$

$$+ \frac{3\alpha dz^2 \ (1+6) \text{ Cof. } v'^2 \text{ Sin. } \pi \text{ . Cof. } \pi}{1+3\alpha}$$

$$- \frac{3\alpha dz^2 \ (1+6)\, m'\zeta \text{ Cof. } v' \ (1 - 2 \,[\text{Cof. } \pi]^2)}{1+3\alpha}$$

$$- d\epsilon^2 \text{ Sin. } \pi \text{ Cof. } \pi + \left(\frac{1+4\alpha}{1+3\alpha}\right) k d\epsilon dz \text{ Cof. } \pi \ . \ . \ . \ (S)$$

On changera de même l'équation Q en celle-ci:

$$\frac{3\alpha dz^2 \text{ Sin. } 2v \text{ . Cof. } \pi^2}{2\,(1+3\alpha)} + \frac{3\alpha\,(1+6) \text{ Sin. } 2v' \text{. Cof. } \pi^2 \text{. } dz^2}{2\,(1+3\alpha)}$$

$$- \frac{3\alpha \ (1+6)\, dz^2 \text{ Sin. } v' \text{ . } m'\zeta \text{ . Sin. } \pi \text{ Cof. } \pi}{1+3\alpha} =$$

$$d(d\epsilon \text{ Cof. } \pi^2) + \frac{(1+4\alpha)\, d(kdz \text{ Sin. } \pi)}{1+3\alpha} \ . \ . \ . \ (T)$$

C'eft en intégrant ces deux équations, ou abfolument, ou au moins par approximation, que l'on parviendra à déterminer le mouvement de l'Axe de la terre, & à s'affurer fi le Phénomene de la préceffion des Equinoxes eft d'accord avec la Théorie Newtonienne. Nous allons entrer dans cette difcuffion, après avoir fait quelques remarques qui rendront la folution précedente beaucoup plus générale.

REMARQUE I.

REMARQUE I.

44. Quelle que ſoit la figure de la terre, pourvû qu'elle ſoit compoſée de couches qui ſoient des ſolides de révolution, & qui s'éloignent peu de la figure Sphérique ; on a vû plus haut (*article* 13) que l'on pouvoit toujours au lieu de $\frac{4\alpha a^5}{15}$ ſubſtituer une quantité conſtante très-petite A, qui dépende de la denſité & de la figure des différentes couches. On peut de même ſuppoſer $\int f d f d X d b \times \frac{ff}{2} = K \times 2D$, & $\int f d f d X d b \times (a-b)^2 = M \times 2D$, K & M étant des conſtantes : on peut donc dans les équations P, Q, R, ſubſtituer A à la place de α, $M-K$ à la place de -2α, K à la place de $1+4\alpha$, & M à la place de $1+2\alpha$. Or en comparant après cette ſubſtitution les équations R, Q, comme on l'a fait plus haut, on parviendra de même à l'équation . . . .

$$2K\,ddP = 2K\left(-dd\epsilon\sqrt{[1-yy]} + \frac{y\,dy\,d\epsilon}{\sqrt{[1-yy]}}\right);$$

d'où l'on tirera comme ci-deſſus $dP = -d\epsilon\sqrt{[1-yy]} + k\,dz$; & les équations T, S, ſe changeront en celles-ci, beaucoup plus générales . . . .

$$\frac{3A\,dz^2\ \text{Sin.}\ 2v\ .\ \text{Coſ.}\ \pi^2}{M+K} + \frac{3A\,(1+\zeta)\ \text{Sin.}\ 2v'\ .\ \text{Coſ.}\ \pi^2 \times dz^2}{M+K}$$

$$-\frac{6A\,(1+\zeta)\,dz^2\ \text{Sin.}\ v'\ .\ m'\zeta\ .\ \text{Sin.}\ \pi\ \text{Coſ.}\ \pi}{M+K}$$

$$= d(d\epsilon \text{ Cof. } \pi^2) + \frac{2Kd(kdz \text{ Sin. } \pi)}{M+K} \quad \ldots \quad (V)$$

$$\& \; dd\pi = \frac{6Adz^2 \times \text{Cof. } v^2 \text{ Sin. } \pi \,.\, \text{Cof. } \pi}{M+K}$$

$$+ \frac{6Adz^2 (1+\zeta) \text{ Cof. } v'^2 \text{ Sin. } \pi \,.\, \text{Cof. } \pi}{M+K}$$

$$- \frac{6Adz^2 (1+\zeta) m'\zeta \text{ Cof. } v' (1 - 2 \text{ Cof. } \pi^2)}{M+K}$$

$$- d\epsilon^2 \text{ Sin. } \pi \text{ Cof. } \pi + \left(\frac{2K \,.\, kd\epsilon dz \text{ Cof. } \pi}{M+K}\right) \quad \ldots \quad (X)$$

REMARQUE II.

45. Il eſt évident que les quantités M, K différent très-peu de ce qu'elles feroient, ſi la terre étoit compoſée de couches Sphériques, puiſque (*hyp.*) les couches de la terre ont à peu près cette figure. Suppoſons donc d'abord la terre Sphérique, & d'une denſité homogene ; on verra aiſément (*article* 43) que K ſera $= \frac{4a^5}{15}$, & que M ſera $= \frac{4a^5}{15}$, c'eſt-à-dire que M ſera $= K$; donc ſi la terre eſt compoſée de couches Sphériques dont les rayons ſoient f & les denſités Δ, on aura $K = \int \frac{4}{15} \times d(f^5) \times \Delta$ ou $\frac{4F'a^5}{15}$, en nommant $F'a^5$ ce que devient $\int \Delta\, d(f^5)$ lorſque $f = a$. Par la même raiſon, on aura $M = \frac{4F'a^5}{15}$: donc en général $M = K$ lorſque la terre eſt compoſée de cou-

ches Sphériques. Donc lorsque la terre est composée de couches à peu près Sphériques, on a M à peu près égal à K, & $M + K$ à peu près $= 2K$. Donc les équations V & X deviendront . . . .

$$\frac{3A\,dz^2 \text{ Sin. } 2v \,.\, \text{Cos. } \pi^2}{2K} + \frac{3A\,(1+\mathit{6})\,dz^2 \text{ Sin. } 2v' \,.\, \text{Cos. } \pi^2}{2K}$$

$$- \frac{3A\,(1+\mathit{6}) \text{ Sin. } v' \,.\, m'\zeta \,.\, \text{Cos. } \pi \,.\, \text{Sin. } \pi \,.\, dz^2}{K}$$

$$= d(d\epsilon \text{ Cos. } \pi^2) + d(k\,dz \text{ Sin. } \pi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (Y)$$

$$\& \; dd\pi = \frac{3A \text{ Cos. } v^2\, dz^2 \text{ Sin. } \pi \,.\, \text{Cos. } \pi}{K}$$

$$+ \frac{3A \text{ Cos. } v'^2\, dz^2 \,.\, \text{Sin. } \pi \,.\, \text{Cos. } \pi \times (1+\mathit{6})}{K}$$

$$- \frac{3A\,dz^2\,(1+\mathit{6}) \text{ Cos. } v' \,.\, m'\zeta \,.\, (1 - 2 \text{ Cos. } \pi^2)}{K}$$

$$- d\epsilon^2 \text{ Sin. } \pi \,.\, \text{Cos. } \pi + k\,d\epsilon\,dz \text{ Cos. } \pi \,. \; . \; . \; . \; . \quad (Z)$$

REMARQUE III.

46. Comme la commune section de l'Ecliptique & de l'Equateur est toujours perpendiculaire à la projection de l'Axe de la terre sur le plan de l'Ecliptique, il est visible que l'arc ou l'angle élementaire de la précession des Equinoxes, c'est-à-dire l'angle que décrit cette commune section de l'Ecliptique & de l'Equateur, est égal à $d\epsilon$. De plus, on a (*article 6*) Cosin. $v^2 = \frac{1}{2} + \frac{\text{Cos. } 2v}{2}$; & de même Cosin. $v'^2 = \frac{1}{2} + \frac{\text{Cos. } 2v'}{2}$. En-

fin, les obſervations apprennent que le mouvement rétrograde des Equinoxes, eſt à peu près uniforme; deſorte que ſi z exprime l'angle parcouru par la terre durant un tems quelconque, l'angle parcouru par la projection de l'Axe ſera $= Mz$, M exprimant une conſtante très-petite & à peu près égale à la fraction $\frac{50''}{360^\circ} = \frac{1}{6.12.360}$. Suppoſons donc que quand la terre commence à parcourir l'angle z, c'eſt-à-dire quand $z = 0$, la diſtance du lieu du Soleil à la projection e du Pôle boreal p de la terre (Fig. 18) ſoit $= U$; il eſt clair que lorſque la terre aura parcouru l'angle z, & que la projection p de l'Axe aura parcouru l'angle Mz en ſens contraire, la diſtance du lieu du Soleil au point e ſera $U + z + Mz$; or l'angle v, c'eſt-à-dire l'angle SCE ou la diſtance du lieu du Soleil à l'extrémité E, différe de la précedente de 180 degrés. Donc Sin. $v = -$ Sin. $U + z + Mz$, & Coſ. $v = -$ Coſ. $U + z + Mz$. De même ſoit n le rapport du mouvement angulaire de la Lune à celui de la Terre, rapport qui eſt environ celui de $13\frac{1}{2}$ à 1, & n' le rapport du mouvement des nœuds de la Lune au mouvement de la Terre, lequel eſt environ celui de $\frac{1}{18}$ à 1, on trouvera que le Sinus de $v' = -$ Sin. $U' + nz + Mz$, & Coſ. $v' = -$ Coſ. $U' + nz + Mz$, en prenant U' pour la diſtance entre le point e & le lieu de la Lune dans l'Ecliptique, lorſque $z = 0$.

Enfin soit δ la distance du lieu Ecliptique de la Lune au nœud ascendant lorsque $z = 0$, on aura $\zeta =$ Sin. $\delta + nz + n'z$, & par conséquent (*art.* 5 & 6)

$$- \zeta \text{ Cos. } v' = \frac{\text{Sin. } V' + \delta + 2nz + n'z + Mz}{2}$$

$$+ \frac{\text{Sin.} - V' + \delta + n'z - Mz}{2} \text{ ; \& } - \zeta \text{ Sin. } v' =$$

$$- \frac{\text{Cos. } V' + \delta + 2nz + n'z + Mz}{2} + \frac{\text{Cos. } \delta - V' + n'z - Mz}{2}.$$

REMARQUE IV.

47. Il faut à présent substituer toutes ces valeurs dans les équations Y & Z pour les intégrer ensuite; mais avant de faire cette substitution & cette intégration, il ne sera pas inutile de voir ce que les observations nous apprennent sur le mouvement de l'Axe de la terre, pour comparer ensuite d'une manière plus facile & plus sensible les observations avec la Théorie.

CHAPITRE IV.

Comparaison de la Théorie précedente avec les observations.

48. M. *Bradley* vient de publier une lettre écrite à Milord *Macclesfield* le 31 Déc. 1747. sur la nutation de l'Axe de la terre; il donne dans cette

lettre le détail d'une ſuite d'obſervations qu'il a faite pendant 20 ans, & deſquelles il réſulte 1°. que l'Axe de la terre eſt ſujet durant une révolution des nœuds de la Lune à une nutation ſenſible qui monte à 18″; 2°. que cette nutation eſt auſſi accompagnée d'une équation dans la préceſſion des Equinoxes. Voici l'hypotheſe qu'il donne d'après M. *Machin*, pour calculer cette nutation & cette équation, hypotheſe avec laquelle il dit que ſes obſervations s'accordent à 2″ près.

49. Soit *P* (Fig. 23) le lieu moyen du Pôle de l'Equateur; *E* le vrai lieu du Pôle de l'Ecliptique, autour duquel le Pôle *P* tourne uniformément en rétrogradant de 50″ par an, ce qui fait la préceſſion moyenne: ſoit *P* ♋ le colure des Solſtices, *P* ♈ celui des Equinoxes. Du point *P* comme centre & d'un rayon égal à 9″ d'un Arc de grand cercle, ſoit décrit un petit cercle *ABCD* dont le vrai Pôle de l'Equateur parcourre la circonférence en 18 ans & 7 mois, par un mouvement rétrograde & correſpondant à celui du nœud de la Lune ; enſorte que ce Pôle ſoit en *A* ſur le colure des Solſtices du côté du Cancer, lorſque le nœud aſcendant de la Lune eſt au commencement du ♈ ; en *B* quand ce nœud eſt dans 0° ♑ ; & en *C* quand ce nœud eſt dans 0° ♎. Dans ce dernier cas, le Pôle boreal de l'Equateur étant au point du cercle *ABCD* qui eſt le plus près du Pôle boreal de l'Ecliptique, l'obliquité de l'Ecliptique, c'eſt-à-dire l'angle de l'Ecliptique avec l'Equateur doit être moindre de 18″, que quand le nœud

ascendant de la Lune étoit en ♈. On voit aussi que le vrai Pôle de l'Equateur en allant de *A* vers *B*, s'approche des étoiles qui passent au Méridien, avec le Soleil, aux environs de l'Equinoxe du Printemps, & s'écarte de celles qui passent au Méridien avec le Soleil vers l'Equinoxe d'Automne, & qu'en même tems la précession vraie des Equinoxes excéde la moyenne, puisque le vrai lieu du Pôle en avançant sur le petit cercle tourne plus vîte autour du Pôle *E* de l'Ecliptique, que le lieu moyen *P*.

REMARQUE I.

50. Par la figure & le discours que je viens de rapporter, il est difficile de savoir si le petit cercle *ABCD* que M. *Bradley* fait décrire au Pôle *P* est parallele à l'Ecliptique ou à l'Equateur; mais comme l'angle de l'Equateur & de l'Ecliptique n'est que de $23\frac{1}{2}°$, & que le Cosinus de cet angle ne différe pas de $\frac{1}{10}$ du Sin. total, puisqu'il est égal à $\frac{91706}{100000}$, il est assez indifférent de supposer ce petit cercle parallele à l'un ou l'autre des deux grands cercles que je viens de nommer; par exemple, si on suppose le petit cercle *ABCD* parallele à l'Ecliptique, & $AP = 9''$, la variation de l'inclinaison au lieu d'être de $18''$, sera de $18'' \times \frac{100000}{91706} =$ à peu près $20''$. Or M. *Bradley* ne répond pas, comme nous l'avons dit,

qu'il n'y ait deux ſecondes d'erreur dans ſes obſervations.

Je crois donc qu'on peut ſuppoſer le petit cercle $ABCD$ parallele au plan de l'Ecliptique, & décrit par le point qui eſt la projection de l'Axe terreſtre, tandis que le centre P du petit cercle décrit le cercle $PQRS$. Cela poſé, ſoit $n'z$ l'angle que le nœud aſcendant de la Lune décrit en avançant de ♈ vers ♑ contre l'ordre des Signes durant le temps que la ligne APE décrit autour de E l'angle Mz égal à la préceſſion moyenne des Equinoxes ; on voit que le point O, dont la viteſſe angulaire autour de P eſt la même (*hyp.*) que celle du nœud aſcendant de la Lune, aura décrit dans ce même temps autour de P un angle $= n'z$, & que l'angle APO ſera $= n'z - Mz$; or ſoit $\pi = \varpi'$ lorſque le nœud eſt en ♈ & le Pôle en A, il eſt certain que lorſque la projection ſera en O, l'angle ϖ' ſera augmenté d'une quantité $= 9'' \times (\text{Sin. tot.} - \text{Coſ.}\ n'z - Mz) \times$ & que l'angle ε ſera augmenté de $\frac{9'' \times \text{Sin.}\ n'z - Mz \times \text{Sin.}\ \varpi'}{\text{Coſ.}\ \varpi'}$.

Je ſuppoſerai donc $\pi = \varpi' - Q\ \text{Coſ.}\ n'z - Mz + Q$; ϖ' étant un angle conſtant, & Q une conſtante qu'on déterminera par les obſervations, & qui eſt environ $= 9''$; ou, pour n'avoir pas plus d'une conſtante dans l'expreſſion de π, je ſuppoſerai $\pi = \varpi - Q\ \text{Coſ.}\ n'z - Mz$; ϖ étant la valeur moyenne de l'angle π, c'eſt-à-dire la valeur de cet angle lorſque le Pôle répond au point P, & que le lieu du nœud de la Lune eſt en ♑ ; à l'égard

gard de ϵ, on trouvera facilement par la construction précedente, que $\epsilon = Mz + \frac{Q \,.\, \text{Sin.}\, n'z - Mz \,.\, \text{Sin.}\, \varpi}{\text{Cof.}\, \varpi}$. Il faudra donc comparer les valeurs de π & de ϵ qu'on trouvera par l'intégration des deux équations Y, Z avec celles qu'on vient de trouver d'après les calculs de M. *Bradley*.

REMARQUE II.

51. Si au lieu de faire décrire un cercle au point A qui est la projection de l'extrémité de l'Axe terrestre, on en faisoit décrire un au Pôle même, dont A est la projection, & qui est l'extrémité réelle de cet Axe; alors $ABCD$ feroit une petite Ellipse dont les Axes AP, PB feroient entr'eux comme Sin. ϖ à 1, & faisant $Q = AP =$ environ 8″, on trouveroit π à peu près $= \varpi - \frac{Q \,\text{Cof.}\, n'z - Mz}{\text{Sin.}\, \pi}$, & $\epsilon = Mz + \frac{Q \,\text{Sin.}\, n'z - Mz}{\text{Cof.}\, \pi}$, ce qui changeroit un peu la valeur des deux équations de l'inclinaison & de la précession, sans en changer le rapport.

Nous allons examiner dans la Remarque suivante, si ces valeurs de π & de ϵ tirées des observations s'accordent avec celles que fournit la Théorie.

REMARQUE III.

52. J'observerai d'abord, que dP qui représente le mouvement journalier du globe terrestre, est égal (*art.* 43) à $- d\epsilon \sqrt{[1 - yy]} + kdz$, ou $- d\epsilon\, \text{Sin.}\, \pi +$

kdz; & comme $d\epsilon$ eſt très-petit par rapport à dz, & qu'au contraire dP doit être très-grand par rapport à dz, c'eſt-à-dire environ $365\frac{1}{4}$ fois plus grand ; il s'enſuit que kdz doit être très-grand par rapport à $d\epsilon$, & qu'on peut regarder $d\epsilon$ comme nulle par rapport à kdz ; de plus, comme nous avons ſuppoſé que la rotation ou le mouvement angulaire dP ſe faiſoit dans le même ſens que $d\epsilon$, & que c'eſt tout le contraire dans la terre, il eſt viſible que k ſera égal à peu près à $365\frac{1}{4}$, pris négativement : d'où il s'enſuit, que dans l'équation Y on peut effacer le terme $d(d\epsilon \text{ Coſ. } \pi')$ du ſecond membre, puiſque cette quantité eſt comme nulle par rapport à $d(kdz \text{ Sin. } \pi)$. Maintenant, l'équation étant ſous cette forme, il n'y a plus qu'à l'intégrer ſimplement pour avoir la valeur de Sin. π, après avoir fait les ſubſtitutions indiquées dans l'*article* 46 ; mais il faut remarquer que dans ces intégrations les termes qui contiendront l'angle $n'z - Mz$, feront beaucoup plus grands que les autres. Car par l'intégration ces termes auront pour diviſeur la fraction $n' - M =$ environ $\frac{1}{18}$, & comme la quantité m' qui eſt la tangente de l'inclinaiſon de l'orbite lunaire eſt environ $\frac{1}{12}$, il s'enſuit que $\frac{m'}{n' - M}$ qui multipliera dans l'intégrale le coefficient $\frac{3A(1+C)}{2K}$, fera

un nombre à peu près $= \frac{3}{2}$; au contraire, le terme qui contiendra l'angle $2U' + 2nz + 2Mz$, sera divisé par $2n$, c'est-à-dire par environ 27 ; & le terme qui contiendra $\frac{3A}{2K}$ avec l'angle $2U + 2z + 2Mz$, sera divisé par 2 ; de plus $1 + 6$ exprime (*article* 43) le rapport de $\frac{\lambda}{n'^3}$ à $\frac{S}{n^3}$: or ce rapport, selon M. *Newton*, est égal à 4 ; & nous ferons voir plus bas, qu'il est plus grand que 2 ; donc le terme qui aura $\frac{3A}{2K \cdot 2}$ pour coefficient, sera au terme qui aura $\frac{3A(1+6)}{2K} \times \frac{m'}{n' - M}$ pour coefficient, comme 1 est à 6 & même plus. Donc ce terme sera beaucoup plus petit que celui des trois termes qui contient l'angle $n'z - Mz$.

On peut donc réduire l'équation Y à celle-ci $\frac{3A(1+6)}{2K} \times \frac{m'dz}{n' - M} \times \frac{-\text{Cos. } \pi . \text{Sin. } \pi . \zeta \text{ Sin. } v'}{-365\frac{1}{4}} = d\,(\text{Sin. } \pi)$; dans laquelle on mettra simplement au lieu de $-\zeta$ Sin. v' la quantité $\frac{\text{Cos. } \delta - U' + n'z - Mz}{2}$. Or $\delta - U'$ est la distance de la projection du Pôle au nœud ascendant, lorsque $z = 0$, car U' est la distance du lieu Ecliptique de la Lune à la projection du Pôle, & δ la distance du lieu Ecliptique de la Lune au nœud. Donc $\delta - U'$ est ici $= 90°$; car nous supposons avec M. *Brad-*

ley, que le Pôle est en ♋ lorsque le nœud est en ♈ : par conséquent Cos. $\delta - U' + n'z - Mz = -$ Sin. $n'z - Mz$. Faisant donc cette substitution, on aura

$$\text{Sin.}\,\pi = \text{Sin.}\,\varpi - \frac{3Am'(1+\epsilon)}{2K\,.\,365\frac{1}{4}} \times \frac{\text{Sin.}\,\varpi\,.\,\text{Cos.}\,\varpi \times \text{Cos.}\,n'z - Mz}{n' - M},$$

donc $\pi = \varpi - \frac{3Am'(1+\epsilon)}{2K\,(365\frac{1}{4})} \times \frac{\text{Sin.}\,\varpi\,.\,\text{Cos.}\,n'z - Mz}{n' - M}$: ce qui s'accordera avec les observations de M. *Bradley*, en supposant $\frac{3Am'(1+\epsilon)}{365\frac{1}{4}\,.\,2K\,(n'-M)} \times$ Sin. $\varpi = 9''$ ou Q.

Venons maintenant à l'équation Z, que nous réduirons de même que la précedente, & par les mêmes raisons (†) à $d\epsilon = -\frac{3A}{2K\,.\,k} \times (2+\epsilon) \times \text{Sin.}\,\pi \times dz$ $+ \frac{3Am'(1+\epsilon)}{k\,.\,K\,\text{Cos.}\,\pi}\,dz \times \zeta\,\text{Cos.}\,v' \times (1 - 2\,\text{Cos.}\,\pi^2)$: donc mettant pour $1 - 2$ Cos. π^2 sa valeur $-$ Cos. $2\,\varpi$, & pour $-\zeta$ Cos. v' sa valeur $\frac{\text{Sin.}\,\delta - U' + n'z - Mz}{2} = \frac{\text{Sin.}\,90° + n'z - Mz}{2} = \frac{\text{Cos.}\,n'z - Mz}{2}$, on aura $\epsilon = \frac{3A(2+\epsilon)}{365\frac{1}{4}\,.\,2K} \times$

(†) Je néglige dans cette équation le terme $dd\varpi$, parce que π étant de l'ordre de $\frac{3Am'(1+\epsilon)}{2K\,.\,k\,(n'-M)}$, $dd\pi$ sera de l'ordre de $\frac{3Am'(n'-M)}{2K\,.\,k} \times (1+\epsilon)$, & par conséquent peut-être négligé à l'égard des termes qui sont de l'ordre de $\frac{3Am'}{2K\,.\,k}(1+\epsilon)$.

$z . \text{Sin.}\ \varpi - \frac{3 A m' \text{Sin.}\ n'z - Mz}{(n'-M) . 2K . 365\frac{1}{4}} \times \frac{\text{Cof.}\ 2\varpi}{\text{Cof.}\ \varpi} \times (1 + 6)$, ce qui s'accorde avec l'équation de M. *Bradley*, en fuppofant $\frac{3 A (2 + 6)}{2K . 365\frac{1}{4}} \text{Sin.}\ \varpi = M = \frac{1}{6 . 12 . 360}$, & Q Sin. ϖ ou $9'' \times$ Sin. $\varpi = \frac{-3 A m' \text{Cof.}\ 2\varpi}{(n'-M) . 2K . 365\frac{1}{4}} \times (1 + 6)$. Or cette feconde valeur de Q s'éloigne affez de celle que nous avons trouvée ci-deffus, $Q = \frac{3 A m' \text{Sin.}\ \varpi\ (1 + 6)}{(n' - M)\ 2K . 365\frac{1}{4}}$, & d'où l'on tire $Q \times \text{Sin.}\ \varpi = \frac{3 A m' \text{Sin.}\ \varpi^2\ (1 + 6)}{(n' - M)\ 2K . 365\frac{1}{4}}$: car Sin. $\varpi^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ Cof. 2ϖ. Donc pour que Sin. ϖ^2 fût égal à $-$ Cof. 2ϖ, il faudroit que Cof. 2ϖ fût $= -1$, c'eft-à-dire que ϖ fût $= 90°$: or $\varpi = 90° - 23\frac{1°}{2}$. Donc &c.

COROLLAIRE.

53. De-là il s'enfuit que l'hypothefe de M. *Machin* adoptée par M. *Bradley*, pour repréfenter le mouvement du Pôle de la Terre, n'eft pas affez exactement conforme à la Théorie ; elle le feroit beaucoup davantage, fi dans les calculs précedens, on n'avoit point le coefficient $1 - 2$ Cof. π^2, mais le coefficient 1 ; ce qui m'avoit fait foupçonner d'abord que je pouvois m'être trompé dans quelque Signe ; car $1 - 2$ Cof. $\pi^2 = 1 - 2yy = (1 - yy) - yy$; or fi on avoit eu la fomme de ces

quantités au lieu de leur différence, on auroit eu le coefficient 1 au lieu de $1 - 2$ Cof. π^2; j'ai donc recommencé mon calcul avec tout le soin possible, mais je n'y ai point découvert de faute, & l'on trouvera encore plus bas le même résultat par une autre méthode.

CHAPITRE V.

Du rapport de la masse de la Lune à celle de la Terre.

54. On a trouvé ci-dessus $\frac{3A(2+\epsilon)\,\text{Sin.}\,\pi}{2K(365\frac{1}{4})} = \frac{1}{6.12.360} = \frac{50''}{360^\circ}$, & Q ou $\frac{9''}{57^\circ} = \frac{3A\,m'(1+\epsilon)\,\text{Sin.}\,\pi}{(n'-M)\,2K.\,365\frac{1}{4}}$; or parce que $\frac{m'}{n'-M}$ = environ $\frac{3}{2}$, & que $\frac{1}{57^\circ} = \frac{1}{60^\circ} \times (1+\frac{1}{20})$ à très-peu près, on aura $2+\epsilon : 1+\epsilon :: \frac{50}{360} : \frac{9}{60} \times (1+\frac{1}{20}) \times \frac{2}{3} :: 50 : 38$ à très-peu près. Donc $1 : 1+\epsilon$ à peu près comme 1 à $3\frac{1}{6}$.

Si on veut faire le calcul plus exactement, on supposera $m' = \frac{5^\circ.\,8'}{\text{Sin. tot.}}$ = à peu près $\frac{5^\circ(1+\frac{1}{37})}{60^\circ(1-\frac{1}{20})}$, ce qui donnera pour le rapport de $1+\epsilon$ à 1 celui de 35 à 15. Selon M. *Newton*, ce rapport est d'environ 1 à 4,

(*liv.* 3 *Princ. prop.* 37) ou plus exactement de 1 à $4\frac{1}{2}$, ce qui différe beaucoup de celui que nous venons de trouver.

REMARQUE I.

55. M. *Newton* n'a déduit le rapport $\frac{1}{1+\epsilon}$ entre les forces $\frac{S}{u^3}$ & $\frac{\lambda}{u^3}$ que de quelques Phenomenes de la hauteur des marées: on sent assez combien ce moyen est peu sûr. Car la hauteur des marées est altérée par une infinité de circonstances étrangeres, qui modifient beaucoup l'effet que devroit produire l'action du Soleil & de la Lune; on peut mettre au nombre de ces causes la profondeur, la situation, & les contours différents des côtes, les courans, les vents même &c. On ne pouvoit donc pas regarder le rapport donné par M. *Newton*, comme assez précis, jusqu'à ce qu'on s'en fût assuré par quelque autre moyen beaucoup plus sûr. Or je crois que celui dont je me suis servi est le plus exact qu'on puisse desirer pour le présent.

REMARQUE II.

56. M. *Daniel Bernoulli* dans son *Traité du Flux & Reflux de la Mer*, qui a partagé le prix de l'Académie en 1740; trouve $\frac{5}{2}$ pour le rapport de $1+\epsilon$ à 1, il déduit aussi ce rapport de quelques observations de la hauteur des marées; & il prétend que les observations dont

M. *Newton* s'est servi pour déterminer le sien, sont mal choisies. Je n'entreprendrai point de décider ici cette question; je me contenterai de faire remarquer que le premier rapport de 1 à 1 + 6, trouvé par mon calcul, est à peu près moyen entre les rapports de 1 à $4\frac{1}{2}$, & de 1 à $2\frac{1}{2}$; mais que le 2[d] est un peu moindre que ce dernier.

Au reste, je dois encore faire observer que la connoissance du rapport de 1 à 1 + 6 dépend de la valeur de Q, ensorte que si Q étoit $= 10''$ au lieu de $9''$, le rapport de 1 à 1 + 6 deviendroit très-sensiblement différent; ainsi quelques secondes de plus ou du moins dans la nutation, changeront sensiblement ce rapport.

Remarque III.

57. Il est visible que le rapport de 1 à 1 + 6 étant connu, on aura facilement le rapport de la masse de la Lune à celle de la Terre. On peut voir le détail du calcul qu'il faut faire pour cela, dans la prop. 37 l. 3 de M. *Newton*, & dans ses Corollaires. M. *Newton* trouve que la masse de la Lune est $\frac{1}{39}$ de celle de la Terre, en supposant $\frac{1}{1+6} = \frac{1}{4\frac{1}{2}}$; selon le rapport $\frac{1}{3\frac{1}{6}}$ trouvé ci-dessus, la masse de la Lune seroit environ $\frac{1}{50}$ de celle de la Terre, & près de $\frac{1}{80}$ selon l'autre.

CHAPITRE

CHAPITRE VI.

Du mouvement que le Pôle de la Terre doit avoir suivant la Théorie.

58. IL suit de nos formules de l'*article* 52.

1°. Que $\frac{3A(1+\zeta)m'.\text{Sin.}\varpi}{2K(n'-M).365\frac{1}{4}} \times \text{Cos.}\ n'z - Mz$; ou $9'' \times \text{Cos.}\ n'z - Mz$ étant l'équation de l'angle ϖ, ou le petit Arc, dont il faut augmenter l'obliquité de l'Ecliptique, en supposant le rayon = 1, la projection de cette équation sur le plan de l'Ecliptique, sera égale à cette équation même multipliée par Sin. ϖ. Car supposant $Cp = 1$ (Fig. 24), CQ le plan de l'Ecliptique, p l'extrémité de l'Axe de la terre, & $p\varpi$ le petit Arc de la nutation, on aura $Qq = \frac{p\varpi \times pQ}{Cp} = p\varpi \times \text{Sin.}\ \varpi$.

2°. Que l'équation de la précession sera . . . . . $\frac{3A(1+\zeta)m' \times -\text{Cos.}\ 2\varpi}{(n'-M).2K.365\frac{1}{4}.\text{Cos.}\varpi} \times \text{Sin.}\ n'z - Mz$; d'où il s'ensuit que la plus grande équation de la précession sera à la plus grande équation de la nutation, (projettée sur le plan de l'Ecliptique) comme $-\frac{\text{Cos.}\ 2\varpi}{\text{Cos.}\ \varpi}$: Sin. ϖ^2. d'où l'on tire la construction suivante.

59. Soit $P\Upsilon$ (Fig. 25) = au Sinus total, PE = au Sinus de l'obliquité de l'Ecliptique, c'est-à-dire au

Sinus d'environ $23\frac{1^{\circ}}{2}$; PE ſera $=$ Coſ. ϖ. Car ϖ eſt l'angle que l'Axe de la terre fait avec l'Ecliptique, & cet angle eſt le complément de $23\frac{1^{\circ}}{2}$. Soit pris AP : $P♈$ :: $9'' \times$ Sin. ϖ eſt au Sinus total, & ſoit décrit du rayon PA le cercle AOV; enſuite ſoit tracée l'Ellipſe ALV, telle que PL ſoit à AP :: — Coſ. 2ϖ : Sin. ϖ^2. Suppoſons maintenant, que tandis que le point P ſe meut ſur la circonférence PQ de P vers Q en avançant chaque année de $50''$, le point A ſe meuve de A vers L, en décrivant autour du centre P de l'Ellipſe ALV des aires proportionnelles au temps, & qu'il acheve ſa révolution dans cette Ellipſe, dans le temps que le nœud de la Lune acheve la ſienne de ♈ vers ♑ &c. Je dis que le mouvement du point A repréſente celui de la projection du Pôle terreſtre ſur le plan de l'Ecliptique.

Car imaginons un point O qui ſe meuve uniformément ſur la circonférence AOV, dans le temps que le point A ou b ſe meut ſur l'Ellipſe ALV, en décrivant autour du centre P des aires proportionnelles aux temps; il eſt évident que le mouvement angulaire du point O ſera préciſément égal au mouvement des nœuds de la Lune, & que les points O, b, arriveront en même temps ſur l'ordonnée BO: or tandis que le point O décrit l'angle $n'z$, le point A ou la ligne EPA décrit l'angle Mz, donc l'angle $APO = n'z - Mz$,

donc $\frac{BO}{AP} =$ Sin. $n'z - Mz$; or $Bb : BO :: PL : PA$ (*hyp.*) :: — Cosinus 2ϖ : Sinus ϖ^2. Donc $\frac{Bb}{AP} =$ $\frac{\text{Sin. } n'z - Mz \times - \text{Cos. } 2\varpi}{\text{Sin. } \varpi^2}$; & on trouvera de même $\frac{BP}{AP} =$ Cos. $n'z - Mz$; donc $\frac{Bb}{BE}$ ou $\frac{Bb}{PE}$, c. à d. l'angle bEA que Eb fait avec $EPA = \frac{\text{Sin. } n'z - Mz \,.\, \times - \text{Cos. } 2\varpi \times AP}{\text{Cos. } \varpi \times \text{Sin. } \varpi^2} =$ $9'' \times \frac{\text{Sin. } n'z - Mz \times - \text{Cos. } 2\varpi}{\text{Cos. } \varpi \,.\, \text{Sin. } \varpi} = \frac{3A \,.\, m' \times (1 + \zeta)}{2K(n' - M) \,.\, 365\frac{1}{4}} \times \frac{-\text{Cos. } 2\varpi}{\text{Cos. } \varpi} \times$ Sin. $n'z - Mz$, en supposant, comme les observations l'indiquent, & comme nous l'avons déja trouvé $\frac{\text{Sin. } \varpi \,.\, 3A\, m'(1 + \zeta)}{2K(n' - M) \,.\, 365\frac{1}{4}} = 9''$. De plus, Eb ou $BE = PE +$ $PB =$ Cos. $\varpi + AP \times$ Cos. $n'z - Mz =$ Cos. $\varpi +$ $9'' \times$ Sinus $\varpi \times$ Cosinus $n'z - Mz =$ Cosinus $\varpi +$ $\frac{3A\, m'(1 + \zeta) \text{ Sin. } \varpi^2 \,.\, \text{Cos. } n'z - Mz}{2K \,.\, (n' - M) \,.\, 365\frac{1}{4}}$; d'où il s'ensuit, que l'angle ϖ diminuera de la quantité $\frac{3A\, m'\, (1 + \zeta) \text{ Sin. } \varpi}{2K\, (n' - M)\, 365\frac{1}{4}} \times$ Cos. $n'z - Mz$, & que par conséquent l'obliquité de l'Ecliptique augmentera de la même quantité; or cette équation ainsi que la valeur de l'angle bEA que nous venons de trouver par la construction précedente, s'accorde parfaitement avec les valeurs que nous avons trouvées dans l'*art.* 52. d'après nos formules, c'est-à-dire d'après la Théorie. Donc la construction précedente re-

préfente le mouvement que le Pôle boreal de la terre, ou plutôt fa projection fur le plan de l'Ecliptique, doit avoir fuivant la Théorie.

COROLLAIRE I.

60. Puifque Sin. ϖ = environ $\frac{91706}{100000}$ = à peu près $\frac{9}{10}$, & que — Cof. $2\varpi = 2$ Sin. $\varpi^2 - 1$, donc AP ou $9'' \times$ Sin. $\varpi = \frac{81''}{10} = 8''$, & $\frac{-\text{Cof. } 2\varpi}{\text{Sin. } \varpi^2}$ = à peu près $\frac{62}{81}$, c'eft-à-dire environ $\frac{3}{4}$. Donc puifque $PL : AB ::$ — Cof. 2ϖ : Sin. ϖ^2, il s'enfuit que PL = environ $6''$. Donc comme Cof. ϖ = environ $\frac{4}{10}$, la plus grande équation de la préceffion, c'eft-à-dire $\frac{PL}{PE}$ ou $\frac{PL}{\text{Cof. } \varpi}$ fera = $6'' \times \frac{10}{4} = 15''$ à très-peu près; & fi on faifoit avec M. *Bradley* & M. *Machin* $PL = PG$, on trouveroit $\frac{PG}{PE} = 20''$; & fuppofant. $AP = 9''$, on auroit $\frac{PG}{PE} \doteq 22''$. Il ne feroit donc pas furprenant que l'équation réelle de la préceffion différât tant foit peu de celles de MM. *Bradley* & *Machin*.

REMARQUE I.

61. M. *Machin* n'a encore rien publié que je fache,

de sa Théorie sur la nutation de l'Axe de la terre. Ainsi je n'ai pu m'éclaircir encore sur la cause de la différence qu'il y a entre les résultats de son calcul & du mien. Je vois seulement par un endroit de la lettre de M. *Bradley*, que M. *Machin* a pris pour hypothese, que le *mouvement en nutation de l'Axe de la terre soit* GOUVERNÉ *par le Pôle de l'orbite de la Lune seulement ;* c'est du moins l'unique sens que je puisse attacher à ces paroles de la lettre, *upon te suppofition, that te* WHOLE *is* GOVERNED *by the Pole of the Moon's orbit only* : or j'ignore ce que M. *Machin* entend ici par le *Pôle* de l'orbite de la Lune. D'ailleurs, il me semble qu'il est essentiel de faire voir pourquoi l'équation la plus sensible du mouvement du Pôle de la terre, est celle qui vient de l'inclinaison de l'orbite & du mouvement des nœuds ; en effet, cette inclinaison étant fort petite, il semble assez naturel de penser, que s'il en résulte une équation sensible dans le mouvement de l'Axe de la terre, il en doit résulter une beaucoup plus considérable de l'action de la Lune & de celle du Soleil, en négligeant l'inclinaison ; ce soupçon peut paroître d'autant plus fondé, que l'action seule du Soleil produit comme on sçait des inégalités très-sensibles dans le mouvement des nœuds de l'orbite de la Lune, & dans l'inclinaison de cette orbite. On peut donc croire que cette action jointe à celle de la Lune, & abstraction faite de l'inclinaison de l'orbite lunaire, doit produire une équation assez considérable dans le mouvement des nœuds de l'Equateur ; ou du

moins si cette équation est peu sensible, il semble que celle qui est produite par l'inclinaison de l'orbite lunaire, devroit l'être beaucoup moins, puisque l'inclinaison de l'orbite lunaire est fort petite, & que l'équation qui en résulte seroit nulle, si l'inclinaison l'étoit. Ce n'est donc que par un calcul exact & rigoureux, & dans lequel on fera entrer l'action du Soleil & celle de la Lune, en ayant égard à toutes les circonstances de ce mouvement, qu'on pourra s'assurer que l'équation qui vient de l'inclinaison de l'orbite lunaire & du mouvement de ses nœuds, est en effet beaucoup plus grande que toutes les autres. C'est ce que nous croyons avoir prouvé dans l'*article* 52 ci-dessus.

Remarque II.

62. Au reste, je dois avertir que M. *Bradley* dit dans sa lettre p. 35, que le mouvement du Pôle seroit plus exactement conforme aux observations, si on supposoit que le *vrai* Pôle de la terre décrivît non un cercle, mais un Ellipse dont les Axes AC, (Fig. 23) DB fussent entr'eux comme 18″ à 16″. Suivant nos calculs, les Axes AP, (Fig. 25) PL étant comme $9'' \times \frac{9}{10}$ à $6''$, le *vrai* Pôle de la terre décriroit une Ellipse dont les Axes seroient entr'eux comme 18″ à 12″; ainsi à cet égard notre Théorie seroit un peu moins différente des observations de M. *Bradley*. Mais il paroît que c'est l'ob-

fervation feule & non la Théorie, qui a déterminé M. *Bradley* à faire décrire au Pôle de la terre une Ellipfe au lieu d'un cercle : il avoue même que cette fuppofition ne s'accorde pas encore parfaitement avec les obfervations, & il laiffe *à la Théorie* le foin de déterminer exactement le lieu du *vrai* Pôle. D'ailleurs j'ignore, comme je l'ai déja obfervé, fi par le mot de *vrai* Pôle de la terre, il entend le Pôle réel de la terre, c'eft-à-dire l'extrémité de fon Axe, ou la projection de cette extrémité fur l'Ecliptique. Car comme il faut diftinguer le *vrai* Pôle de la terre d'avec fa projection, & qu'il faut diftinguer auffi le *vrai* mouvement du Pôle d'avec fon mouvement moyen, il me femble que le mot de *vrai* eft ici équivoque ; enforte que fi c'étoit les Axes AP, PL de la projection qui fuffent entr'eux comme 18 à 16, les Axes de l'Ellipfe décrite par le Pôle, feroient comme 18 à $16 \times \frac{9}{10}$, c'eft-à-dire comme 18 à $14 \frac{2}{5}$; ce qui feroit encore plus conforme à la Théorie.

COROLL. II.

63. Il eft vifible que la ligne PO faifant toujours un angle droit avec la ligne des nœuds de la Lune, le Sinus de $n'z - Mz$ ou de l'angle OPA eft égal au Sinus de la diftance du nœud afcendant de la Lune au premier point d'Aries, cette diftance ♈ ☊ étant prife contre l'ordre des fignes; donc le Sinus de $n'z - Mz$

eſt égal au Sinus pris négativement, de la diſtance ☊♑♎♋♈ du nœud aſcendant de la Lune au premier point d'Ariès, priſe ſuivant l'ordre des Signes; à l'égard du Coſinus de $n'z - Mz$, il ſera égal au Coſinus, pris poſitivement, de la même diſtance du nœud aſcendant de la Lune au premier point d'Aries, priſe ſuivant l'ordre des Signes.

Or ſuivant la Remarque précedente, on a $9'' \times$ Coſ. $n'z - Mz$ pour l'équation additive de l'obliquité de l'Ecliptique, & $15'' \times$ Sin. $n'z - Mz$ pour l'équation additive de la préceſſion : de-là on tire les deux analogies ſuivantes.

Premiere analogie : comme le Sinus total eſt au Coſinus de la diſtance du nœud aſcendant de la Lune au premier point d'Aries, ainſi $9''$ ſont à une équation π' qu'il faudra ajouter à l'obliquité de l'Ecliptique, c'eſt-à-dire à $23\frac{1^\circ}{2}$; il eſt viſible que cette équation ſera ſouſtractive, ſi la diſtance du nœud aſcendant de la Lune au premier point d'Aries eſt entre 90° & 270°.

Seconde analogie : comme le Sinus total eſt au Sinus de la diſtance du nœud aſcendant de la Lune au premier point d'Aries, ainſi $15''$ ſont à une équation ε' dont il faut diminuer la préceſſion ; cette équation ſera viſiblement additive, ſi la diſtance du nœud aſcendant de la Lune au premier point d'Aries eſt plus grande que 180°.

REMARQUE

REMARQUE III.

64. On voit par les formules ou analogies précedentes, que l'équation de la précession & la nutation ne doivent pas redevenir exactement les mêmes après une révolution des nœuds de la Lune, parce que durant ce tems le premier point d'Aries a rétrogradé d'environ $(18\frac{1}{2}) \times 50''$, c'est-à-dire à peu près de $15'$. Mais ce mouvement est trop petit, pour qu'on s'apperçoive en 20 ans du changement qu'il peut produire dans la nutation. Cependant il paroît que M. *Bradley* y a eu égard, comme on le voit par la construction que nous avons donnée d'après lui dans l'*article* 50.

CHAPITRE VII.

Du changement que la nutation de l'Axe de la terre, & l'équation de la précession doivent produire dans le lieu apparent des étoiles.

65. SOIT comme ci-devant ♈♑♎ (Fig. 26) l'Ecliptique, & ♈ *K* ♎ une portion de l'Equateur, faisant avec l'Ecliptique un angle de $23\frac{1}{2}°$ (cette portion ou moitié de l'Equateur doit être imaginée au-dessous du plan de l'Ecliptique); soit ♈♈′ l'équation

de la préceſſion que je nomme — ϵ', & qui ſe déterminera par la ſeconde des deux analogies de l'*article 63*; il eſt viſible que l'Equateur ſe trouvera alors dans la ſituation ♎′ K' ♈′, & que la différence des Arcs K'♈ & K'♈′ ſera ♈♈′ × Coſ. $23\frac{1}{2}^{\circ}$ = — ϵ' Sin. ϖ. Donc K'♈′ = K'♈ — ϵ' Sin. ϖ; & l'angle ♈K'♈′ des deux plans ſera = — ϵ' Coſ. ϖ, dans l'hypotheſe que l'Equateur faſſe toujours un angle conſtant avec l'Ecliptique. Je chercherai d'abord dans cette hypotheſe la variation des Etoiles en aſcenſion droite & en déclinaiſon, enſuite je déterminerai cette même variation dans l'hypotheſe que l'équation de la préceſſion ſoit nulle, & que l'angle de l'Equateur & de l'Ecliptique varie: & comme les deux équations de l'obliquité & de la préceſſion ſont fort petites, la ſomme de ces deux variations partielles ſera à très-peu près la variation totale.

66. Soit donc d'abord (Fig. 27) $K'DQ$ un quart de l'Equateur qui différera très-peu de l'Arc K'♈, PB le Coſinus de la déclinaiſon d'une Etoile, & DV le Sinus de ſon aſcenſion droite ♈D, il s'agit de déterminer ce que deviendront ce Coſinus & ce Sinus, lorſque le plan $K'D$♈ viendra dans la ſituation K'♈′, l'Etoile n'ayant pas changé de poſition par rapport au plan $K'D$♈.

Soit tirée BA perpendiculaire à PK'; la ligne menée de l'Etoile au point B étant perpendiculaire à PB & au plan $K'PB$, il eſt facile de voir que la ligne

menée de l'Etoile au point A, fera un angle droit avec PA; d'où il s'enfuit, que si Pb (Fig. 28) eft le Cofinus de la déclinaifon de l'Etoile, lorfque le plan $K'PB$ devient $K'Pb$, la ligne bA perpendiculaire à la commune fection $K'P$ des deux plans tombera fur l'extrémité A, de la ligne BA. Car fi elle tomboit ailleurs, comme en a, alors les deux lignes menées de l'Etoile aux points A, a, feroient toutes deux perpendiculaires à $K'P$, ce qui eft impoffible. Donc les lignes BA, bA font dans un plan perpendiculaire à $K'P$: donc l'angle BAb, des lignes BA, Ab, eft égal à l'angle des plans $K'PB$, $K'Pb$, & par conféquent $= - \epsilon'$ Cof. ϖ. Donc nommant s le Sinus de la déclinaifon de l'Etoile qui eft fuppofée ici Méridionale, on aura $Ab = AB + s \times - \epsilon'$ Cof. ϖ; car foit E (Fig. 29) l'Etoile, & EB, Eb les Sinus de déclinaifon, on aura $Ab = AB + Ob = AB + EB \times$ angl. BAb; de-là il eft facile de voir, qu'à caufe des triangles rectangles PAB, (Fig. 28) PAb, le Cofinus Pb fera $= PB + (Ab - AB) \times \frac{AB}{PB} = PB$ (Fig. 27) $- s \times \epsilon'$ Cof. $\varpi \times \frac{DE}{DP}$. Or DE eft fenfiblement égal au Cofinus de l'afcenfion droite, parce l'Arc $K'\Upsilon$ différe très-peu de 90°. donc nommant t le Cofinus de l'afcenfion droite, on aura $st \times - \epsilon'$ Cof. ϖ pour l'augmentation du Cof. de la décl. Donc la déclinaifon fera diminuée d'un angle $= \frac{st \times - \epsilon' \text{Cof.} \varpi}{s}$; donc

$+ \epsilon'$ Cos. $\varpi \times$ Cos. asc. dr. sera l'équation de la déclinaison.

De plus, (Fig. 28 & 27) on voit que l'angle $K'Pb =$ $K'PB + (Ab - AB) \times \frac{AP}{PB^2} = K'PB - \epsilon' . s$ Cos. $\varpi \times$ $\frac{PE}{PD} \times \frac{1}{PB} = K'PB - \frac{\epsilon' \text{ Cos. } \varpi \times \text{ Sin. décl.}}{\text{Cos. décl.}} \times$ Sin. asc. dr. Or la distance du point K' au point $\Upsilon' = K'\Upsilon - \epsilon' \times$ Sin. ϖ; par conséquent la distance du point b au point $\Upsilon' = K'\Upsilon - \epsilon' \times$ Sinus ϖ — angl. $K'PB +$ $\frac{\epsilon' \text{ Cos. } \varpi \times \text{ Sin. décl.} \times \text{ Sin. asc. dr.}}{\text{Cos. décl.}}$: or $K'\Upsilon$ — angl. $K'PB$ est l'ascension droite de l'Etoile, lorsque le Cosinus de sa déclinaison est PB. Donc l'équation de l'ascension-droite est $- \epsilon'$ Sin. $\varpi + \epsilon'$ Cos. $\varpi \times$ tang. décl. $\times$ Sin. asc. dr.

67. Supposons maintenant, que l'angle de l'Ecliptique avec l'Equateur varie, & que le plan $K'P\Upsilon'$ (Fig. 30) s'éléve en tournant autour de $P\Upsilon'$, de la quantité π' qu'on déterminera par la premiere des deux analogies données dans l'*art.* 63; on trouvera par un raisonnement semblable à celui qu'on vient de faire tout à l'heure, que par ce mouvement la ligne bO deviendra $bO +$ $\pi' \times$ Sin. décl. & le Cosinus Pb, $Pb + \frac{\pi' . \text{ Sin. décl.} \times bO}{Pb} =$ $Pb + \pi'$ Sin. décl. $\frac{DV'}{PD} = Pb + \pi'$ Sin. décl. $\times$ Sin. asc. droite. Donc la déclinaison sera diminuée de l'angle $\frac{\pi' \text{ Sin. décl.} \times \text{ Sin. asc. dr.}}{\text{Sin. décl.}}$; donc l'équation de la déclinaison

sera $- \pi'$. Sin. asc. dr. A l'égard de l'ascension droite, on voit que bO étant augmenté de la quantité $\pi' \times$ Sin. décl. l'ascension droite sera augmentée de l'angle $\frac{\pi'. \text{Sin. décl.} \times PO}{Pb^2} = \frac{\pi' \text{Sin. décl.}}{\text{Cos. décl.}} \times$ Cos. asc. dr. Donc l'équation de l'ascension droite sera π' Cos. asc. dr. $\times$ tang. décl. Donc ajoutant ensemble les deux équations en ascension droite & en déclinaison, on aura . . . . . .

ϵ' Cos. $\varpi \times$ Cos. asc. dr. $- \pi' \times$ Sin. asc. dr. pour l'équation de la déclinaison.

Et $- \epsilon'$ Sin. $\varpi + \epsilon'$ Cos. $\varpi \times$ tang. décl. $\times$ Sin. asc. dr. $+ \pi'$ tang. décl. $\times$ Cos. asc. dr. pour l'équation de l'ascension droite.

COROLLAIRE.

68. Pour rendre l'usage de ces deux formules facile, on remarquera que (*art.* 63) $- \epsilon' = - 15''$ multipliées par le Sinus du nœud ascendant de la Lune au premier point d'Aries, & que $\pi' = 9''$ multipliées par le Cosinus de cette même distance : donc nommant p & q ces Sinus & Cosinus, on aura ϵ'. Cos. $\varpi = 15'' \times \frac{4}{10} \times p$; ϵ' Sin. $\varpi = 15'' \times \frac{9}{10} p$; & $\pi = 9'' q$: d'où l'on tire les deux regles suivantes. Soit p le Sinus de la distance du nœud ascendant de la Lune au premier point d'Aries, q son Cosinus ; je dis que l'*équation de la déclinaison* sera $+ 6'' \times p$ Cos. asc. dr. $- 9'' q$ Sin. asc. dr. & que l'*équation*

de l'ascension droite sera $-13\frac{1''}{2}p + 6''p$ tang. décl. × Sin. asc. dr. $+ 9''q$ tang. décl. × Cos. asc. droite : le Sinus p devra être pris négativement, si la distance du nœud ascendant de la Lune au premier point d'Aries est de plus de 180, & le Cosinus q devra être pris négativement, si cette distance est entre 90° & 270°.

Remarque I.

69. Les formules précedentes sont pour les Etoiles dont la déclinaison est Méridionale, & qui n'ont pas plus de 90° d'ascension droite. Si elles en avoient plus de 90 & moins de 180, il faudroit faire négatif le Cosinus de l'ascension droite.

Si la déclinaison est Méridionale, & que l'Etoile ait plus de 180 degrés d'ascension droite, ensorte que le point B (Fig. 27) auquel l'Etoile répond perpendiculairement se trouve dans le quart de cercle ♎ k ♑, en ce cas la tangente de la déclinaison, & le Cosinus aussi-bien que le Sinus de l'ascension droite seront des quantités négatives, & devront être prises comme telles dans les formules de l'*article* précedent.

Si la déclinaison de l'Etoile est Septentrionale, & que son ascension droite ne soit pas plus grande que 180 degrés, la tangente de la déclinaison devra être prise négativement.

Si la déclinaison de l'Etoile est Septentrionale, &

que son ascension droite soit plus grande que 180 degrés, la tangente de la déclinaison devra être prise positivement.

Quand l'équation est soustractive & que la déclinaison est Septentrionale, c'est une marque que la déclinaison doit être augmentée; quand elle est additive, & que la déclinaison est Septentrionale, c'est une marque que la déclinaison doit être diminuée.

REMARQUE II.

70. Au reste, l'usage de ces formules suppose qu'on ait déja calculé l'ascension droite & la déclinaison, en ayant égard à la précession moyenne de $50''$ par an. En vertu de cette précession moyenne, la variation annuelle des Etoiles en déclinaison, est $-50'' \times$ Sin. $23\frac{1}{2}^{\circ} \times$ Cos. asc. dr. & leur variation en ascension droite, est $50'' \times$ Cos. $23\frac{1}{2}^{\circ} - 50'' \times$ Sin. $23\frac{1}{2}^{\circ} \times$ tang. décl. $\times$ Sin. asc. dr. ce qui se trouve aisément par la même méthode que dans l'*art.* 67; il faut donc calculer par ces formules la variation annuelle des Etoiles, ou leur variation pendant une partie quelconque de l'année, avant de faire usage des formules de l'*article* 67 qui ne dépendent que de la nutation de l'Axe, & de l'*équation* de la précession.

REMARQUE III.

71. Les formules de l'*art.* 67 ne sont plus exactes, lorsque la déclinaison est de près de 90, parce qu'alors la tangente de la déclinaison est fort grande, & que l'équation devient fort grande aussi. Dans ce cas, l'angle $K'Pb$ (Figure 28 & 27) a pour tangente $\frac{Ab}{PA} =$

$$\frac{AB - \epsilon' . s . \text{Cof.}\, \varpi}{PA} = \text{cotang. afc. dr.} - \frac{\epsilon' . s . \text{Cof.}\, \varpi}{PE \times PB} \times PD$$

$$= \text{cotang. afc. dr.} - \epsilon' . s . \text{Cof.}\, \varpi \times \frac{1}{\text{Cof. décl. Sin. afc. dr.}}.$$

Ayant calculé cet angle $K'Pb$, on aura facilement ensuite l'angle $bP\Upsilon'$; après quoi on cherchera par la même méthode, de combien ce même angle $bP\Upsilon'$ (Fig. 30) doit varier par le changement d'obliquité de l'Ecliptique. Au reste, ce calcul est assez inutile, n'y ayant point d'Etoiles plus proches du Pôle que de deux degrés, & je crois qu'on peut s'en tenir aux deux formules de l'*article* 67.



CHAPITRE

CHAPITRE VIII.

Remarques sur la Théorie précedente, qui servent à la confirmer.

REMARQUE I.

72. NOus avons déterminé dans l'*art.* 30 le mouvement d'un point quelconque du globe terrestre, en décomposant ce mouvement en trois autres, l'un perpendiculaire, les deux autres paralleles au plan de l'Ecliptique, & nous avons trouvé 1°. que le mouvement perpendiculaire au plan de l'Ecliptique, est

$$fdy \text{ Cosinus } X - fydP \text{ Sinus } X - \frac{ydy\,(a-b)}{\sqrt{[1-yy]}};$$

2°. que le mouvement parallele à la ligne $q'v'$ (Fig. 20), est $-yd\epsilon \times (a-b) + fd\epsilon$ Cos. $X \times \sqrt{[1-yy]} + fdP$ Cos. X; 3°. que le mouvement parallele au Méridien qui est perpendiculaire sur l'Ecliptique, est

$$\frac{fydy \text{ Cos. } X}{\sqrt{[1-yy]}} + (a-b)\,dy + fd\epsilon \text{ Sin. } X + fdP \text{ Sin. } X \times \sqrt{[1-yy]}.$$

Or nous avons trouvé dans l'*art.* 44, qu'en général dP étoit $= -d\epsilon \sqrt{[1-yy]} + kdz$, kdz exprimant une constante ; donc substituant cette valeur de dP, on aura pour l'expression de ces trois mouvemens,

L

1°. $f\,dy \times$ Cofin. $X - \frac{y\,dy\,(a-b)}{\sqrt{[1-yy]}} + fy\,d\varepsilon \times$ Sin. $X \times$ $\sqrt{[1-yy]} - fyk\,dz \times$ Sin. X . . . .
2°. $-\,y\,d\varepsilon\,(a-b) + fk\,dz \times$ Cofin. X;
3°. $\frac{fy\,dy \text{ Cof. } X}{\sqrt{[1-yy]}} + (a-b)\,dy + fyy\,d\varepsilon \times$ Sin. $X +$ $fk\,dz$ Sin. $X \sqrt{[1-yy]}$.

Or je dis, que fi on fait deux de ces mouvemens $=0$, le troifiéme le fera auffi néceffairement. Car foient, par exemple, le fecond & le troifiéme $=0$, on aura $\frac{a-b}{f} = \frac{k\,dz \text{ Cof. } X}{y\,d\varepsilon}$, & $\frac{y\,dy \text{ Cof. } X}{\sqrt{[1-yy]}} + \frac{k\,dz\,dy \text{ Cof. } X}{y\,d\varepsilon} + yy\,d\varepsilon \times$ Sin. $X + k\,dz$ Sin. $X . \sqrt{[1-yy]} = 0$; d'où l'on tire tang. X ou $\frac{\text{Sin. } X}{\text{Cof. } X} = \left(\frac{-y\,dy}{\sqrt{[1-yy]}} - \frac{k\,dz\,dy}{y\,d\varepsilon}\right) : (yy\,d\varepsilon + k\,dz \sqrt{[1-yy]}) = \frac{-dy}{y\,d\varepsilon \sqrt{[1-yy]}}$. Maintenant, fi l'on fait le premier de ces mouvemens $=0$, on trouve dy Cof. $X - \frac{yk\,dz\,dy \text{ Cof. } X}{y\,d\varepsilon \sqrt{[1-yy]}} + y\,d\varepsilon$ Sin. $X \sqrt{[1-yy]} -$ $yk\,dz \times$ Sin. $X = 0$, & par conféquent, on a $\frac{\text{Sin. } X}{\text{Cof. } X} =$ $\left(-dy + \frac{k\,dz\,dy}{d\varepsilon \sqrt{[1-yy]}}\right) : (y\,d\varepsilon \sqrt{[1-yy]} - yk\,dz) =$ $\frac{-dy}{y\,d\varepsilon \sqrt{[1-yy]}}$, ce qui s'accorde avec la valeur précedente.

Donc fi on veut trouver dans le plan CKH (Fig. 31)

perpendiculaire à l'Axe Cp, un point qui ſoit en repos, il n'y a qu'à prendre l'angle $KC'G$ dont la tangente $= \frac{-dy}{yd\epsilon\sqrt{[1-yy]}}$, & ſur la ligne GC' le point O, tel que $\frac{C'O}{CC'}$ ou $\frac{f}{a-b} = \frac{yd\epsilon}{kdz \text{ Coſ. } KC'G}$; il eſt clair que ce point O ſera en repos durant l'inſtant que la projection du point p décrit l'angle $d\epsilon$; or on voit par ces formules, que le rapport de $C'O$ à $C'C$ eſt toujours le même, quelque part qu'on place le point C', & que la tangente de l'angle $KC'G$ eſt auſſi toujours la même: d'où il s'enſuit que tous les points placés dans la ligne CO feront en repos, & qu'ainſi on peut regarder CO comme l'Axe *inſtantané* de la rotation du corps. Je dis *inſtantané*: car il eſt viſible que cet Axe change continuellement.

J'ai pris le point G du côté oppoſé à celui ſuivant lequel les angles X ſont pris dans la ſolution générale, parce que la tangente de l'angle $KC'G$ eſt négative étant $= \frac{-dy}{yd\epsilon\sqrt{[1-yy]}}$. Car j'ai ſuppoſé dans la ſolution générale, que y alloit en croiſſant, ainſi $-dy$ eſt une quantité négative.

On peut s'aſſurer de la bonté de ce calcul, en prouvant par la Géométrie ſimple, que l'Axe CO de rotation doit être en effet dans le plan $GC'C$. Pour cela, ſoit pp' (Fig. 32) l'Arc que décrit l'extrémité de l'Axe terreſtre, il eſt certain que tous les points de l'Axe décriront des Arcs ſemblables à celui-ci, & que l'Axe

de rotation sera dans un plan perpendiculaire à la ligne pp'. Or la ligne pp' est perpendiculaire à l'Axe de la terre, & pQ étant regardé comme une petite portion du Méridien perpendiculaire à l'Ecliptique, on voit que si on prolonge cet Arc suivant la ligne droite pZ, & qu'on prenne pV perpendiculaire à pp' pour marquer le plan de rotation, la tangente de l'angle ZpV sera $=$ $\frac{pQ}{Qp'} = \frac{-dy}{\sqrt{[1-yy]}.y d\epsilon}$, parce que $pQ = \frac{-y dy}{\sqrt{[1-yy]}}$, & $p'Q = y d\epsilon$. Donc &c. On voit par cet accord la justesse de nos calculs.

REMARQUE II.

37. Si l'extrémité p de la ligne Cp (Fig. 31) décrit un Arc de grand cercle, CO devient perpendiculaire à CC', & f devient infinie par rapport à $a-b$. Donc à cause de $\frac{f}{a-b} = \frac{y d\epsilon}{k dz \text{ Cos. } X}$, on a $k = 0$; car on a en général $\frac{f}{a-b} = \frac{\sqrt{[y^2 d\epsilon^2 + \frac{dy^2}{1-yy}]}}{k dz}$, à cause de Cos. $X =$ $\frac{y d\epsilon}{\sqrt{[y^2 d\epsilon^2 + \frac{dy^2}{1-yy}]}}$. Donc $\frac{f}{a-b} = \frac{pp'}{k dz}$ (Fig. 32); donc puisque (*hyp.*) pp' n'est pas $= 0$, il s'ensuit que $k = 0$, si f est infinie par rapport à $a-b$. Or de ce que $k = 0$; il s'ensuit que dP ou $-d\epsilon\sqrt{[1-yy]} + k dz$ (*art.* 44) se réduit à $-d\epsilon \sqrt{[1-yy]}$.

Maintenant, on peut s'assurer par un autre moyen, que

l'angle dP eſt $= - ds \sqrt{[1-yy]}$, lorſque l'extrémité de l'Axe décrit un Arc de grand cercle. En effet, lorſque l'extrémité p de l'Axe de la terre décrit un Arc de grand cercle, il eſt facile de voir que la rotation ſe fait autour de quelque ligne placée dans le plan de l'Equateur, lequel eſt perpendiculaire à l'Axe de la terre. Soit CR (Figure 33) cette ligne, CQ la commune ſection de l'Equateur CQR & de l'Ecliptique OQZ, OQL l'angle de l'Ecliptique & de l'Equateur, lequel a pour Sinus y, & $\sqrt{[1-yy]}$ pour Coſinus. Soient enſuite RQ, Rq les poſitions ſucceſſives de l'Equateur dans l'inſtant que l'extrémité p ſe meut de p en p'; il eſt évident, en menant la ligne ou petit Arc Qq perpendiculaire à RQ & à Rq, que le point Q parviendra en q, & qu'ainſi le chemin Zq de ce point ſera $= - ZQ \times$ Sin. angl. $ZQq = - ZQ \times$ Coſ. QZq ou $- ZQ \times$ Coſ. OQL. Remarquez que je mets $- ZQ$, parce que j'ai ſuppoſé dans la ſolution générale, que dP étoit de Z vers R, & qu'ici il eſt de Z vers q. Or l'angle ou arc $ZQ = ds$; car la commune ſection CQ de l'Equateur & de l'Ecliptique étant toujours perpendiculaire à la projection de l'Axe, ſon chemin ou ſa viteſſe angulaire doit être $=$ à la viteſſe angulaire ds de cette projection, & dans le même ſens : donc Zq ou $dP = - ds \sqrt{[1-yy]}$; ce qui confirme de nouveau la juſteſſe & la bonté de nos calculs.

REMARQUE III.

74. Suppoſons qu'aucune force n'agiſſe ſur le globe terreſtre que celle de ſa rotation primitive, il eſt certain qu'on aura $A = 0$ dans l'*article* 44 ; & les équations V & X de cet article qui ſont également applicables au cas où la terre eſt un Globe, & à celui où elle eſt un Sphéroide, ſe réduiront à . . . . .

$d\,(d\epsilon \text{ Coſinus } \pi^2) + \frac{2Kd\,(kdz \text{ Sinus } \pi)}{M+K} = 0$,

& $- d\epsilon^2 \text{ Coſinus } \pi \,.\, \text{Sin. } \pi + \frac{2K\,(kdz\,d\epsilon \text{ Coſ. } \pi)}{M+K} =$ $dd\pi$, qui ſe changent en celle-ci ſeule, ...

$- d\epsilon^2 \text{ Coſinus } \pi \,.\, \text{Sinus } \pi - \frac{d\,(d\epsilon \text{ Coſ. } \pi^2)\,.\,d\epsilon}{d\pi} = dd\pi$

ou $2d\pi dd\pi + d\epsilon^2 \frac{\text{Sin. } 2\pi}{2} \times 2d\pi + \frac{2d\epsilon dd\epsilon}{2} + \frac{2d\epsilon dd\epsilon}{2} \times$ $\text{Coſin. } 2\pi - \frac{d\epsilon^2\,.\,4d\pi \text{ Sin. } 2\pi}{2} = 0$, dont l'intégrale eſt

$d\pi^2 + d\epsilon^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\text{Coſ. } 2\pi}{2}\right) - Ndz^2 = 0$, ou $d\pi^2 +$ $d\epsilon^2 \text{ Coſ. } \pi^2 = Ndz^2$, N & dz étant conſtantes ; or $\sqrt{[d\pi^2 + d\epsilon^2 \text{ Coſ. } \pi^2]}$ eſt évidemment l'Arc pp' que décrit l'extrémité p de l'Axe, ce qui prouve que la viteſſe de ce point eſt conſtante, s'il n'y a point d'autre force que celle de la rotation ; or on ſçait que cette propoſition eſt vraie pour un globe qui tourne ; nouvelle confirmation de la bonté de nos calculs. De plus,

on voit que cette propoſition eſt vraie auſſi pour un Sphéroide Elliptique, qui ne feroit animé par aucune autre force, que par celle de ſa rotation primitive autour d'un Axe quelconque.

REMARQUE IV.

75. Donc puiſque (*article* 72) $\frac{a-b}{f} = \frac{kdz \text{ Coſ. } X}{yd\epsilon}$, & que Coſ. $X = \frac{yd\epsilon}{\sqrt{[d\pi^2 + y^2 d\epsilon^2]}}$, il s'enſuit que $\frac{a-b}{f} = \frac{kdz}{\sqrt{[d\pi^2 + d\epsilon^2 \text{ Coſ. } \pi^2]}}$; d'où l'on voit que ſi aucune autre force n'agit ſur la terre que ſa force primitive de rotation, l'angle OCC' (Fig. 31) entre l'Axe de *rotation* CO, & l'Axe CC' de *figure* ſera toujours conſtant. Cette propoſition eſt en effet vraie pour un globe; car tant qu'aucune force étrangere n'agit ſur lui, il conſerve toujours le même Axe de rotation, & par conſéquent chacun de ſes diamétres qu'on peut regarder comme ſon Axe CC', fait toujours le même angle avec l'Axe de rotation. On voit auſſi que cette propriété a lieu dans un Sphéroide.

REMARQUE V.

76. Si dans la Figure 32 on prolonge la partie infiniment petite pQ du Méridien juſqu'en R, il eſt facile de voir que cette ligne fera un angle droit avec l'Axe de la terre, & que pR ſera à la diſtance $\sqrt{[1-yy]}$ du

point p à l'Ecliptique, comme 1 à y. D'où il s'enfuit que cette tangente $pR = \frac{\sqrt{[1-yy]}}{y}$. De plus, foit V le point où fe trouve l'Axe de rotation dans la ligne pV, & foit prolongée cette ligne jufqu'en S, il eft clair que $\frac{a-b}{f}$ étant $= \frac{kdz}{\sqrt{[d\pi^2 + y^2 d\epsilon^2]}}$, & $a - b = 1$ au point p, on aura $pV = \frac{\sqrt{[d\pi^2 + y^2 d\epsilon^2]}}{kdz}$. De plus pS, fera à pR comme le Sinus total eft au Cof. X; d'où il s'enfuit que $pS = \frac{pR \times \sqrt{[d\pi^2 + y^2 d\epsilon^2]}}{yd\epsilon} = \frac{\sqrt{[1-yy]} \cdot \sqrt{[d\pi^2 + yyd\epsilon^2]}}{yyd\epsilon}$. Donc $SV = (yyd\epsilon + kdz\sqrt{[1-yy]}) \times \frac{\sqrt{[d\pi^2 + y^2 d\epsilon^2]}}{yyd\epsilon \cdot kdz}$. Donc la diftance du point V au plan de l'Ecliptique, c'eft-à-dire $\frac{SV \times \sqrt{[1-yy]}}{pS} = \frac{yyd\epsilon + kdz\sqrt{[1-yy]}}{kdz}$.

Il fuit de-là 1°. que fi la terre étoit un globe parfait, fur lequel le Soleil & la Lune n'exerçaffent point d'action, $\frac{yyd\epsilon + kdz\sqrt{[1-yy]}}{kdz}$ devroit être conftante, parce que l'Axe de rotation ne changeroit point de place, & que par conféquent il feroit toujours à la même diftance du plan de l'Ecliptique; & c'eft en effet ce qui fe trouve vrai par l'équation Y (*art.* 45). Car faifant $A = 0$, on trouve $d(d\epsilon \text{ Cof. } \pi^2) + d(kdz \text{ Sin. } \pi) = 0$,

&

& par conséquent $d\epsilon$ Cof. $\pi^2 + k dz$ Sin. $\pi = N dz$, N étant un nombre conftant ; donc à caufe de Cofinus $\pi = y$, & de Sinus $\pi = \sqrt{[1-yy]}$, on aura $\frac{yyd\epsilon + kdz\sqrt{[1-yy]}}{kdz} = \frac{N}{k}$, c'eft-à-dire égal à un nombre conftant, ce qui confirme de nouveau la bonté de nos formules.

2°. Si la terre eft un Sphéroide, on a en fuppofant $A = 0$, $d\epsilon$ Cof. $\pi^2 + \frac{2K \cdot kdz \text{ Sin. } \pi}{M+K} = N dz$ fuivant la formule V de l'*article* 44 ; donc $\frac{yyd\epsilon + kdz\sqrt{[1-yy]}}{kdz}$, c'eft-à-dire la diftance du Pôle V de rotation au plan de l'Ecliptique, fera $\frac{N}{k} + \frac{M-K}{M+K} \times$ (Sin. π) : d'où l'on voit que cette diftance variera un peu, à caufe que la quantité $M - K$ n'eft $= 0$, que quand la terre eft un globe. Elle fera cependant conftante, 1°. fi on a Sin. $\pi =$ à une conftante, c'eft-à-dire, fi l'Axe de la terre eft l'Axe même de rotation ; 2°. fi on a $k = 0$, c'eft-à-dire fi l'Axe de rotation eft perpendiculaire à l'Axe de figure ; la ligne pV devenant alors infinie. On pourroit croire qu'il y auroit encore un troifiéme cas, fçavoir celui où l'Axe tourneroit autour d'une ligne perpendiculaire au plan de l'Ecliptique, l'extrémité de cet Axe décrivant un cercle parallele à ce plan ; car alors Sin. π feroit conftant. Mais il eft aifé de fe convaincre, que ce cas ne fçauroit avoir lieu ; car par l'équation X, on a

$dd\pi = - d\epsilon^2$ Cof. π Sin. $\pi + kdzd\epsilon$ Cof. $\pi \times \frac{2K}{M+K}$:

d'où l'on voit que pour que π fût conftant, il faudroit qu'on eût $d\epsilon = o$, ou $d\epsilon = \frac{kdz}{\text{Sin.}\,\pi} \times \frac{2K}{M+K}$. Or 1°. fi le Pôle de la terre eft fuppofé *fe mouvoir* parallélement à l'Ecliptique, on ne fçauroit fuppofer $d\epsilon = o$. 2°. Si on fait Sin. π conftant, & par conféquent $d\pi = o$, on aura Cof. X ou $\frac{yd\epsilon}{\sqrt{[d\pi^2 + y^2 d\epsilon^2]}} = 1$; la ligne pV, (Fig. 32) coupée en V par l'Axe de rotation, tombera donc alors fur pZ, & l'on aura $pV = \frac{yd\epsilon}{kdz}$: or lorfque la ligne pV tombe fur pZ, & que l'Axe de rotation (qui paffe par V) eft perpendiculaire au plan de l'Ecliptique, comme on le fuppofe, on a $pV \times pR = 1$, & $pV = \frac{1}{pR} = \frac{y}{\sqrt{[1-yy]}}$. Donc $\frac{y}{\sqrt{[1-yy]}} = \frac{yd\epsilon}{kdz}$; donc $d\epsilon = \frac{kdz}{\sqrt{[1-yy]}} = \frac{kdz}{\text{Sin.}\,\pi}$; donc pour que l'extrémité de l'Axe de la terre décrivît un cercle parallele au plan de l'Ecliptique, il faudroit que $d\epsilon$ fût $= \frac{kdz}{\text{Sin.}\,\pi}$; mais nous venons de voir un peu plus haut, qu'il faudroit auffi que $d\epsilon$ fût $= \frac{kdz}{\text{Sin.}\,\pi} \times \frac{2K}{M+K}$: or ces deux expreffions de $d\epsilon$ ne peuvent être égales que dans le cas de $M = K$; c'eft-à-dire lorfque la terre eft un globe. Donc &c.

On peut auſſi démontrer d'une autre maniére que $d\epsilon$ devroit être $= \frac{kdz}{\text{Sin. } \pi}$, ſi l'extrémité de l'Axe de la terre décrivoit un cercle parallele à l'Ecliptique : pour cela, on remarquera que dans cette hypotheſe le même diamétre de l'Equateur ſe trouveroit toujours ſur le plan de l'Ecliptique ; d'où il s'enſuit, que l'angle que nous avons nommé dP (*art.* 28) ſeroit $= 0$; or dP (*art.* 44) $= -d\epsilon\sqrt{[1-yy]} + kdz$: donc $d\epsilon = \frac{kdz}{\sqrt{[1-yy]}} = \frac{kdz}{\text{Sin. } \pi}$.

REMARQUE VI.

77. On a trouvé la ligne $pV = \frac{yd\epsilon}{kdz \text{ Coſ. } X} = \frac{\sqrt{[d\pi^2 + y^2 d\epsilon^2]}}{kdz}$: or cette ligne eſt la tangente de l'angle que fait l'Axe de rotation avec l'Axe de la terre ; d'où il eſt aiſé de voir que cet angle ſera abſolument inſenſible. Car $k = -365\frac{1}{4}$, & $\sqrt{[d\pi^2 + y^2 d\epsilon^2]}$ eſt $< yd\epsilon + d\pi$. Or la plus grande valeur de $d\epsilon$ ſuivant la Théorie, eſt $\frac{dz}{6 \cdot 12 \cdot 360} + \frac{9''}{57^\circ} \times (n-M) \times \frac{-\text{Coſ. } 2\pi}{\text{Sin. } \pi \cdot \text{Coſ. } \pi} = \frac{dz}{6 \cdot 12 \cdot 360} + \frac{1}{60 \cdot 60 \cdot 6\frac{1}{3}} \times (n-M) \times \frac{-\text{Coſ. } 2\pi}{\text{Sin. } \pi} \times \frac{1}{\text{Coſ. } \pi}$; & la plus grande valeur de $d\pi$, eſt $\frac{1}{60 \cdot 60 \cdot 6\frac{1}{3}} \times (n-M)$; donc à cauſe de $-\frac{\text{Coſ. } 2\pi}{\text{Sin. } \pi^2} = \frac{3}{4}$ (*art.* 60) & de $\text{Coſ. } \pi = \frac{4}{10}$,

on aura $\frac{y d\epsilon + d\pi}{k dz}$, ou $\frac{d\epsilon \text{ Coſ. } \pi + d\pi}{k dz} = \frac{-1}{6 \cdot 12 \cdot 360 \cdot 365\frac{1}{4}} \times \frac{2}{5} - \frac{3 \cdot 9}{18 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 6\frac{1}{3} \cdot 365\frac{1}{4}} - \frac{1}{18 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 6\frac{1}{3} \cdot 365\frac{1}{4}}$. Donc la tangente de l'angle dont il s'agit ſera ſi petite, qu'elle ſera abſolument inſenſible. Il n'eſt donc point ſurprenant que l'action du Soleil & de la Lune ſur la terre, ne change point ſenſiblement l'Axe de rotation ni le Pôle de rotation.

On verra de même par l'équation $dP = - d\epsilon \times \sqrt{[1 - yy]} + kdz$, que l'action du Soleil & de la Lune ne produira aucune inégalité ſenſible dans la rotation de la terre. Car, ſuivant cette valeur de dP & la précedente valeur de $d\epsilon$, la plus grande inégalité ſera à peu près $15'' \times \text{Sin. } \varpi =$ environ $13''$. Or $13''$ de degré ne font pas une ſeconde de tems.

Au reſte, il eſt bon d'obſerver que nous ne parlons ici que de la rotation de la terre autour de ſon *Axe de figure*, & non pas autour de ſon vrai *Axe de rotation* qui change à chaque inſtant, quoiqu'il ſoit toujours fort près de l'autre. On prouvera plus bas que la rotation autour de ce dernier Axe eſt, ſi on peut parler ainſi, encore plus ſenſiblement uniforme.

R E M A R Q U E VII.

78. Nous avons vû ci-deſſus, que la diſtance du point V (Figure 34) à l'Ecliptique, eſt $\frac{d\epsilon \text{ Coſ. } \pi^2 + k dz \text{ Sin. } \pi}{k dz}$;

or comme pV eſt une quantité très-petite, le point V eſt extrêmement près du point où l'Axe de rotation coupe la terre; donc on peut prendre $\frac{d\iota \text{Coſ.} \pi^2 + kdz \text{Sin.} \pi}{kdz}$ pour la diſtance de l'extrémité de l'Axe de rotation, ou du *Pôle de rotation*, au plan de l'Ecliptique. Donc nommant cette diſtance $V[1 - y'y']$, on aura au lieu de l'équation Y, celle-ci . . . .

$$(A') \ldots\ldots d(V[1-y'y']) = \frac{3A\,dz\,\text{Sin.}\,2v\,.\,\text{Coſ.}\,\pi^2}{2K\,.\,k}$$

$$+ \frac{3A(1+\zeta)\,dz\,\text{Sin.}\,2v'\,.\,\text{Coſ.}\,\pi^2}{2K\,.\,k}$$

$$- \frac{3A(1+\zeta)\,m'\zeta\,\text{Sin.}\,v'\,.\,\text{Coſ.}\,\pi\,.\,\text{Sin.}\,\pi\,.\,dz}{K\,.\,k}$$

REMARQUE VIII.

79. Il eſt clair que l'angle entre l'Axe de figure & l'Axe de rotation eſt ſenſiblement égal à $\frac{yd\iota}{kdz\ \text{Coſ.}\ X} = \frac{V[d\pi^2 + yyd\iota^2]}{kdz}$ qui en eſt la tangente; or cet angle eſt à l'angle compris entre la projection de l'Axe de figure & celle de l'Axe de rotation, comme $\frac{pV}{1}$ eſt à $\frac{pO}{y}$; c'eſt-à-dire (à cauſe de $pO = pV$ Sin. X) :: y : Sinus X :: 1 : $\frac{-d\pi}{\text{Coſ.}\ \pi\,.\,V[d\pi^2 + yyd\iota^2]}$; je mets $-d\pi$,

parce que π eſt ſuppoſé aller en diminuant, & y en augmentant ; donc l'angle compris entre les deux projections $= \frac{-d\pi}{\text{Coſ.}\,\pi\,.\,k\,dz}$. Donc comme $d\pi^2$ eſt d'un ordre conſidérablement moindre que $dd\pi$, on peut prendre $-\frac{dd\pi}{\text{Coſ.}\,\pi\,.\,k\,dz}$ pour l'accroiſſement de l'angle entre les deux projections : & puiſque la projection de l'Axe de figure eſt ſuppoſée décrire l'angle $d\epsilon$, on aura $-\frac{dd\pi}{\text{Coſ.}\,\pi\,.\,k\,dz} + d\epsilon$ pour l'expreſſion de l'angle que décrit à chaque inſtant ſur le plan de l'Ecliptique la projection de l'Axe de rotation. Donc nommant cet angle $d\epsilon'$, & négligeant dans l'équation Z le terme $-d\epsilon^2 \times$ Sin. π . Coſ. π, qui eſt évidemment nul par rapport à $k\,d\epsilon\,dz$ Coſ. π, on aura . . . .

$$(B') \; \ldots\ldots - d\epsilon' = \frac{3A\,\text{Coſ.}\,v^2\,.\,dz\,\text{Sin.}\,\pi}{K\,.\,k}$$

$$+ \frac{3A\,.\,\text{Coſ.}\,v'^2\,dz\,\text{Sin.}\,\pi\,(1+6)}{K\,.\,k}$$

$$- \frac{3A\,dz\,(1+6)\,m'\zeta\,\text{Coſ.}\,v' \times -\,\text{Coſ.}\,2\pi}{K\,.\,k\,\text{Coſ.}\,\pi}$$

On peut donc par le moyen de cette équation & de celle de l'*article* 78 précedent, déterminer la poſition inſtantanée de l'Axe de rotation de la terre, en la regardant comme un globe ; & cet Axe différe très-peu (*article* 77) de ſon Axe de rotation réel. Nous déterminerons dans la ſuite par une autre méthode cet Axe

de rotation, & nous verrons que le réſultat ſera parfaitement d'accord avec le précedent.

CHAPITRE IX.

Conſéquences qui réſultent de la Théorie précedente, par rapport à la figure de la Terre.

80. NOUS avons trouvé ci-deſſus *article* 44, qu'en regardant la terre comme un Sphéroide Elliptique ſolide & homogene, on a $3A = \frac{3 \cdot 4 \alpha a^5}{15}$, & M ou $K = \frac{4a^5}{15}$. Donc ſi on ſuppoſe que la terre ſoit un ſolide compoſé de couches Elliptiques différentes, dont les rayons ſoient f, les Ellipticités $F\alpha$, F étant une fonction quelconque du rayon f, & Δ les denſités, on aura $\frac{3A}{K} = \frac{3 \cdot 4}{15} \times \frac{\int \Delta d(F f^5 \alpha)}{\frac{4}{15}\int \Delta d(f^5)} = \frac{3\int \Delta d(f^5 F \alpha)}{\int \Delta d(f^5)}$, $\int \Delta d\ (f^5 F)$ & $\int \Delta d\ (f^5)$ étant toujours ſuppoſées être les intégrales complettes qui répondent à $f = 1$, & $F = 1$. Or ſi on nomme φ le rapport de la force centrifuge à la peſanteur ſous l'Equateur, on trouvera facilement par les formules que M. *Clairaut* a données dans ſon Livre *de la Figure de la Terre*, $\alpha = \frac{5\varphi\int \Delta d(f^5)}{10\int \Delta d(f^5) - 6\int \Delta d(f^5 F)}$: car M. *Clairaut*, page 226 de cet Ouvrage, trouve $10 A\delta - 2D = 5A\varphi$, δ étant ce que nous appellons

ici α, A étant $= \int \frac{\Delta d(f^5)}{3}$, & $D = \int \Delta \alpha d(f^5 F)$. Cela posé, on a (*art.* 52) $\frac{3A}{2K} \times \frac{(2+6) \times \text{Sin.}}{-k} = \frac{1}{6 \cdot 12 \cdot 360}$; donc à cause de $2 + 6 = 3 + \frac{1}{3}$ (*article* 54) de $k = -365\frac{1}{4}$, de Sin. $\varpi = \frac{9}{10}$, on aura $\frac{3A}{K} = 365\frac{1}{4} \times \frac{10}{9} \times \frac{3}{10} \times \frac{1}{3 \cdot 12 \cdot 360} =$ à très-peu près $\frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 12}$. Donc $\frac{\int \Delta d(f^5 F \alpha)}{\int \Delta d(f^5)}$ est $= \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 12}$, c'est-à-dire ($\alpha$ étant égal à $\frac{1}{174}$ par les opérations faites en Laponie & au Perou) que $3 \int \Delta d(f^5 F)$ est une quantité $= \frac{174}{3 \cdot 3 \cdot 12} \times \int \Delta d(f^5)$; si la terre est un solide composé de couches Elliptiques quelconques, peu éloignées de la figure Sphérique: or je dis, & je vais démontrer tout à l'heure, que si $3 \Delta d(f^5 F)$ est égale à $\frac{174}{3 \cdot 3 \cdot 12} \times \int \Delta d(f^5)$, on aura $\int 3 \Delta d(F f^5) < \frac{174}{3 \cdot 3 \cdot 12} \times \frac{5}{3} \times \int \Delta d(f^5)$; d'où il s'ensuivra que α sera plus petit que la fraction suivante $[5 \varphi \int \Delta d(f^5)] : [10 \int \Delta d(f^5) - \frac{174 \cdot 10}{3 \cdot 3 \cdot 12 \cdot 3} \times \int \Delta d(f^5)]$, c'est-à-dire (à cause de $\varphi = \frac{1}{289}$) que α sera $< \frac{1}{578}$: $[1 - \frac{174 \cdot 10}{3 \cdot 12 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 3}]$ ou $\alpha < \frac{1}{256}$; ce qui est très-éloigné

gné des observations qui donnent $\alpha = \frac{1}{174}$; de-là nous conclurons que la terre ne peut être regardée comme tout-à-fait solide, & formée de couches Elliptiques.

81. Pour démontrer que $3\int \Delta d(f^5 F)$ est plus petit que $\frac{174 \times 5}{3 \cdot 3 \cdot 12 \cdot 3} \int \Delta d(f^3)$, la question se réduit à prouver que $\int \Delta d(f^5)$ est plus petit que $\frac{5}{3} \int \Delta d(f^3)$; car alors $3\int \Delta d(f^5 F)$ sera aussi plus petit que $\int \Delta d(f^3) \times \frac{178 \cdot 5}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 12}$, puisque (*art.* 80) $3\int \Delta d(f^5 F) = \frac{174}{3 \cdot 3 \cdot 12} \times \int \Delta d(f^5)$: or je distingue cette proposition en trois cas. 1°. Celui où Δ va toujours en diminuant du centre à la circonférence. 2°. Celui où Δ va en augmentant. 3°. Celui où Δ va tantôt en diminuant, & tantôt en augmentant.

Premier cas. Soit AD (Fig. 35) $= 1$, la plus grande valeur de f, & soient BEC, BFC, deux courbes, dont la premiere ait pour abscisses & pour ordonnées correspondantes, des lignes égales à f^5 & à Δ (ensorte que AG, par ex. étant $= f^5$, on ait $GE = \Delta$,) & dont la seconde ait pour abscisses & pour ordonnées des lignes $=$ à f^3 & à Δ : les ordonnées Δ de chacune de ces courbes iront en diminuant de A en D, puisque Δ va en diminuant (*hyp.*) depuis $f = 0$ jusqu'à $f = 1$. (Il est inutile d'observer que f^5 & f^3 sont ici supposées divisées par une puissance convenable de AD, qui représente l'unité). Cela posé, on voit que $\int \Delta d(f^5)$ sera l'aire

N

ABCDE, & que $\int \Delta d (f^5)$ ſera l'aire *ABFCD*. Donc ſi je puis prouver que $\int \Delta d (f^5)$ eſt $< \int \Delta d (f^3)$; on aura à plus forte raiſon $3 \int \Delta d (f^5) < 5 \int \Delta d (f^3)$; la difficulté ſe réduit donc à faire voir que la premiere de ces deux aires eſt plus petite que l'autre. Or menant *EF* parallele à *AD*, les abſciſſes *AH*, *AG* qui répondent à des ordonnées égales *GE*, *HF* ſont entr'elles comme f^3 à f^5. Donc tant que f ſera < 1, on aura $AH > AG$, donc la courbe *AEC* eſt toute entiere au-dedans de la courbe *AFC*. Donc &c.

On peut remarquer que ce premier cas, eſt celui qui a été ſuppoſé juſqu'à préſent par tous ceux qui ont traité de la Figure de la Terre; & en effet, il eſt aſſez vraiſemblable que les couches voiſines du centre ſont les plus denſes, quoique cela ne ſoit pas abſolument néceſſaire, lorſque les couches ſont ſuppoſées ſolides. Or dans ce premier cas, on vient de trouver que $\int \Delta d (f^5)$ eſt plus petit, non-ſeulement que $\frac{5}{3} \int \Delta d (f^3)$; mais que $\int \Delta d (f^3)$: d'où l'on peut conclure que α ſera dans cette hypotheſe beaucoup plus petit que $\frac{1}{256}$; & par conſéquent encore plus éloigné du rapport obſervé $\frac{1}{174}$.

Second cas. Soient comme dans le cas précedent les courbes *BEC*, (Figure 36) *BFC*, dont les ordonnées *GE*, *HF*, vont maintenant en augmentant de *A* en *D*, & ſoit pris $FO = \frac{3}{2} FE$, on aura l'aire $BOCFB =$

$\frac{3}{2}$ $BFCEB = \frac{3}{2}$ $ABECD - \frac{3}{2}$ $ABFCD = \frac{3}{2} \times$ $\int \Delta d(f^5) - \frac{3}{2} \int \Delta d(f^3)$. Or je dis qu'il s'ensuit de-là, que $\int \Delta d(f^5) < \frac{5}{3} \int \Delta d(f^3)$. Pour le faire voir, je remarque qu'il suffit de prouver que $FO < FK$, ou au moins n'est jamais plus grand; car alors $BOCFB$ ou $\frac{3}{2} \int \Delta d(f^5) - \frac{3}{2} \int \Delta d(f^3)$ sera $< ABFCD$, c'est-à-dire que $\int \Delta d(f^3)$. Or. $FK = 1 - f^3$; FO ou $\frac{3}{2} FE = \frac{3}{2} f^3 - \frac{3}{2} f^5$; il faut donc prouver que $1 - f^3$ $>$ ou $= \frac{3}{2} f^3 - \frac{3}{2} f^5$, c'est-à-dire que $1 >$ ou $=$ $\frac{5f^3}{2} - \frac{3f^5}{2}$. Or lorsque $f = 1$, on a $1 = \frac{5f^3}{2} - \frac{3f^5}{2}$; & lorsque $f = 0$, on a $1 > \frac{5f^3}{2} - \frac{3f^5}{2}$: la question se réduit donc à prouver que $\frac{5f^3}{2} - \frac{3f^5}{2}$ va toujours en diminuant depuis $f = 1$ jusqu'à $f = 0$, ou, ce qui est la même chose, toujours en augmentant depuis $f = 0$ jusqu'à $f = 1$, ou, ce qui est encore la même chose, que la différence $\frac{15f^2 df - 15f^4 df}{2}$ de cette quantité est toujours positive, ou au moins n'est jamais négative, tant que f ne passe pas 1 : or cela est évident; car si $f = 0$, on a $15f^2 df - 15f^4 df = 0$, & si f est une fraction, on a $15f^2 df > 15f^4$. Donc &c. Donc $3\int \Delta d(f^5)$ est plus petit que $5\int \Delta d(f^3)$. *Ce Q. F. D.*

On peut démontrer d'une autre maniére & sans figure, que si les densités Δ vont en augmentant depuis $f = 0$, jusqu'à $f = 1$, $\int \Delta d(f^5)$ sera toujours $< \frac{5}{3} \times \int \Delta d(f^3)$. Car $\frac{3}{2} \int \Delta d(f^5) - \frac{3}{2} \int \Delta d(f^3) = -\frac{3\Delta}{2} \times (f^3 - f^5) + \int \frac{3d\Delta}{2} (f^3 - f^5) = \int \frac{3d\Delta}{2} (f^3 - f^5)$, lorsque $f = 1$: or $\int \Delta d(f^3) = \Delta f^3 - \int d\Delta \,.\, f^3 = \Delta' - \int d\Delta (f^3)$, lorsque $f = 1$, en nommant Δ' la densité à la surface de la terre : il faut donc prouver que $\int \frac{3d\Delta}{2} \times (f^3 - f^5) < \Delta' - \int d\Delta (f^3)$, ou que $\int d\Delta (\frac{5f^3}{2} - \frac{3f^5}{2}) < \Delta'$. Or tant que f est < 1, on a $\frac{5f^3}{2} - \frac{3f^5}{2} < 1$, & lorsque $f = 1$, on a $\frac{5f^3}{2} - \frac{3f^5}{2} = 1$, comme on l'a vû tout à l'heure. Donc $\int d\Delta \, (\frac{5f^3}{2} - \frac{3f^5}{2}) < \int d\Delta$, c'est-à-dire $< \Delta' - \Delta''$, Δ' étant la densité à la surface de la Terre, & Δ'' la densité au centre. Donc à plus forte raison $\int d\Delta \, (\frac{5f^3}{2} - \frac{3f^5}{2}) < \Delta'$. Donc &c. *Ce Q. F. D.*

En général, il est évident par cette démonstration, que plus le rapport de $\int \Delta d\,(f^5)$ à $\int \Delta d\,(f^3)$ approchera de l'unité & s'éloignera du nombre $\frac{5}{3}$, plus

α sera au-dessous de $\frac{1}{256}$, & par conséquent au-dessous de $\frac{1}{174}$: soit donc $n\int\Delta d(f^5) - n\int\Delta d(f^3) = q\int\Delta d(f^3)$, Δ allant toujours en augmentant du centre à la circonférence; il faut que $\frac{n+q}{n}$ soit < 2, $n+q$ & n étant des nombres positifs. On a $n\int\Delta d(f^5) - n\int\Delta d(f^3) = n\int d\Delta\,(f^3 - f^5)$, lorsque $f = 1$, & $q\int\Delta d(f^3) = q\Delta' - q \times \int d\Delta(f^3)$: or pour que $\int f^3 d\Delta(n+q) - \int d\Delta \, . \, nf^5$ soit $< q\Delta'$, il faut que $(n+q)\,f^3 - nf^5$ ne soit jamais $> q$, c'est-à-dire que $3(n+q)$ ne soit jamais plus petit que $5n$: de-là il s'ensuit que $q = \frac{2n}{3} + \frac{\delta}{3}$, δ étant une quantité positive ou zero. De plus, $\frac{q+n}{n}$ devant être < 2, il faut que $\frac{q}{n}$ soit < 1. Donc $\frac{2}{3} + \frac{\delta}{3n} < 1$; donc la plus petite valeur de $\frac{q+n}{n}$, est celle où $\delta = 0$, c'est-à-dire où $q = \frac{2n}{3}$; & c'est l'hypothese dont nous nous sommes servis. Cependant il pourroit se faire, que si on prenoit $n\int\Delta d(f^5) - p\int\Delta d(f^3) = q\int\Delta d(f^3)$ p, q, n étant trois indéterminées, on trouvât $\int\Delta d(f^5)$ encore plus petit que $(\frac{5}{3} - \epsilon)\int\Delta d(f^3)$, ϵ étant un nombre positif; d'où l'on tireroit l'Ellipticité α encore plus petite, & par conséquent plus éloi-

gnée de la véritable : mais comme cette recherche ne m'eſt point néceſſaire ici, je la laiſſe à faire à d'autres.

On ne ſçauroit donc regarder la terre comme un Sphéroide ſolide, compoſé de couches Elliptiques d'une épaiſſeur infiniment petite, dont la denſité aille toujours en croiſſant ou en diminuant de la circonférence au centre : je dis, de plus, qu'on ne ſçauroit ſuppoſer que ces couches ſoient d'une épaiſſeur finie, la denſité ſuivant d'ailleurs telle loi qu'on voudra ; car ſoient leurs épaiſſeurs finies, & que $\alpha F'$, $\alpha F''$, $\alpha F'''$ &c. ſoient leurs Ellipticités, f', f'', f''' &c. leurs rayons, & δ', δ'', δ''' &c. leurs denſités, on aura 1°. au lieu de $\int \Delta\, d(Ff^5)$ la quantité $F'\delta' f'^5 + F''\delta''(f''^5 - f'^5) + F'''\delta'''(f'''^5 - f''^5)$ &c. 2°. au lieu de $\int \Delta\, d(f^5)$ la quantité $\delta' f'^5 + \delta''(f''^5 - f'^5) + \delta'''(f'''^5 - f''^5)$ &c. 3°. au lieu de $\int \frac{5\Delta}{2} d(f^3)$ la quantité $\frac{5\delta' f'^3}{2} + \frac{5\delta'}{2} \times (f''^3 - f'^3) + \frac{5\delta'''}{2} \times (f'''^3 - f''^3)$ &c. Or f', f'', f''' &c. n'étant jamais > 1 ; il s'enſuit 1°. que $\frac{5}{3}\delta' f'^3 > \delta' f'^5$; 2°. que $\frac{5\delta''}{3}(f''^3 - f'^3) > \delta''(f''^5 - f'^5)$; car f'' étant $> f'$ (*hyp.*), on aura $\frac{5f''^3}{2} - \frac{3f''^5}{2} > \frac{5f'^3}{2} - \frac{3f'^5}{2}$, puiſque nous avons prouvé que $\frac{5f^3}{2} - \frac{3f^5}{2}$ alloit toujours en augmentant depuis $f = 0$ juſqu'à $f = 1$, &c. Donc

en général $\int \Delta\, d\,(f^1) < \frac{1}{3} \int \Delta\, d\,(f^3)$, quelle que ſoit l'épaiſſeur des couches, & la loi de leurs Ellipticités & de leurs denſités.

Troiſiéme cas. Ce que nous venons de démontrer pour le cas où les couches ſont d'une épaiſſeur finie, s'applique viſiblement au cas où elles ſont d'une épaiſſeur infiniment petite.

Donc en général, *on ne ſçauroit regarder la terre comme un Sphéroide ſolide, compoſé de couches Elliptiques peu éloignées de la figure Sphérique, quelles que ſoient les denſités, les Ellipticités & les épaiſſeurs de ces couches; cette ſuppoſition ne pouvant ſe concilier à la fois avec la quantité connue de la préceſſion des Equinoxes, & la quantité, auſſi connue, de l'applatiſſement de la terre.*

Remarque II.

82. Mais ſi on ſuppoſe la terre en partie ſolide, & en partie fluide, ainſi qu'elle l'eſt réellement, on pourra accorder le Phenomene de la préceſſion des Equinoxes avec la figure de la terre, telle que les obſervations la donnent. Car pour déterminer le mouvement de l'Axe de la terre, on ne doit point avoir égard à la partie fluide; le mouvement que l'action du Soleil & de la Lune produiroit dans cette partie, ne feroit autre choſe que le *Flux & Reflux*, & ne cauſeroit aucun déplacement dans les parties ſolides du globe. Pour rendre cette vérité ſenſible, ſoit *S* (Fig. 37) le Soleil,

PEpe un Méridien de la terre ; ſuppoſons que le centre *C* ſoit en repos, que la terre ſoit fluide avec un noyau Sphérique ſolide au centre, & qu'elle ait pris la figure qu'elle doit avoir en vertu de ſa rotation autour de ſon Axe, & de l'action du Soleil : il eſt viſible qu'une particule quelconque *O* du fluide ſera également preſſée en tout ſens ; elle eſt donc dans le même cas, que ſi aucune force n'agiſſoit ſur elle ; ainſi l'action du Soleil ſur les différentes parties de la terre, ne peut produire aucun déplacement dans la maſſe totale ; & quand on ne ſuppoſeroit pas que la terre fut parvenue à ſa figure conſtante, il eſt certain que ſi le Soleil étoit en repos, ſon action ne feroit qu'exciter dans les eaux un mouvement d'oſcillation, dont j'ai déterminé les loix ailleurs (†).

Imaginons donc maintenant, pour fixer les idées, que la terre conſiſte en un noyau ſolide Elliptique homogene, dont l'Ellipticité ſoit α, & recouvert pardeſſus d'une couche fluide dont l'épaiſſeur ſoit fort petite par rapport à celle du noyau, & dont l'Ellipticité ſoit α', qui eſt celle qui a été trouvée par les obſervations, on aura $\alpha' = \frac{1}{174}$ & $\alpha < \frac{1}{256}$: maintenant ſoit δ la denſité du fluide, Δ celle du noyau, & φ le rapport de la force centrifuge à la peſanteur ſous l'Equateur, on trouve, comme je l'ai montré dans mes Recherches ſur la cauſe des Vents $\alpha' = [\frac{\varphi}{2} + \frac{3\alpha}{5}(\frac{\Delta - \delta}{\Delta})[:]1 - \frac{3\delta}{5\Delta}]$;

(†) *Réflexions ſur la cauſe des Vents.* 1746.

donc

donc $\frac{1}{174} - \frac{3\delta}{5\Delta}\left(\frac{1}{174}\right) = \frac{1}{578} + \frac{3\alpha}{5} - \frac{3\alpha\delta}{5\Delta}$; donc $\frac{\delta}{\Delta} = \left[\frac{5}{3} \times \left(\frac{1}{174} - \frac{1}{578} - \frac{3\alpha}{5}\right)\right] : \left(\frac{1}{174} - \alpha\right)$; or α étant $< \frac{1}{256}$, (*art.* 81) on voit que la valeur de $\frac{\delta}{\Delta}$ eſt poſitive ainſi qu'elle le doit être, & qu'on aura par cette équation le rapport qui doit être entre la denſité de la partie fluide & celle de la partie ſolide, pour que le Phenomene de la préceſſion des Equinoxes s'accorde avec le Phenomene de la figure de la Terre.

Je ne prétends pas, au reſte, que la ſtructure intérieure de la Terre, ſoit telle que je viens de la déterminer. J'ai voulu ſeulement montrer, par l'exemple le plus ſimple qu'il m'a été poſſible de choiſir, que la figure de la Terre peut s'accorder avec la préceſſion des Equinoxes, ſi on ſuppoſe qu'une partie de la terre ſoit fluide.

CHAPITRE X.

Eclairciſſement ſur une difficulté qui peut ſe préſenter dans la ſolution générale du Problême.

83. IL me ſemble qu'il ne doit y avoir aucune difficulté ſur la maniére dont nous avons intégré par approximation les équations *Y* & *Z* (*art.* 45), pour trouver la préceſſion annuelle des Equinoxes & la nuta-

tion de l'Axe de la terre ; on pourroit néanmoins, pour intégrer ces équations, s'y prendre d'une autre maniére, qui conduiroit, ce me femble, à des conféquences très-différentes de celles que nous avons déduites dans les Chapitres précedens. Comme le paralogifme en feroit affez fubtil, je crois devoir l'expofer ici, avec l'étendue néceffaire.

Il eft certain, que fuivant les obfervations de M. *Bradley*, $\pi = \varpi - Q$ Cof. $\overline{n'z - Mz}$, & $\epsilon = Mz + \frac{Q \text{ Sin. } \varpi}{\text{Cof. } \varpi} \times$ Sin. $\overline{n'z - Mz}$. Négligeant donc dans l'équation *Y* tous les termes où il fe rencontre des Cofinus ou Sinus d'autres angles que $\overline{n'z - Mz}$, elle fe changera en celle-ci . . . . :

$- 3A(1 + 6)\zeta m'$ Sin. v' Cof. π . Sin. π . $dz^2 = d(d\epsilon$ Cof. $\pi^2) + d(k\,dz$ Sin. $\pi)$, dans laquelle on ne mettra au lieu de $- 2\zeta$ Sin. v' que fa valeur $-$ Sin. $\overline{n'z - Mz}$, trouvée *art.* 52. Donc à caufe de $\frac{1}{\text{Cof. } \pi^2} = \frac{1}{\text{Cof. } \varpi^2} - \frac{2Q \text{ Sin. } \varpi \text{ Cof. } \overline{n'z - Mz}}{\text{Cof. } \varpi^3}$, & de Sin. $\pi =$ Sin. $\varpi -$ Cof. $\varpi \times Q$ Cof. $\overline{n'z - Mz}$, on aura $d\epsilon = \frac{F\,dz}{\text{Cof. } \varpi^2} - \frac{k\,dz \text{ Sin. } \varpi}{\text{Cof. } \varpi^2} - dz \times \frac{2Q \text{ Cof. } \overline{n'z - Mz} \text{ . Sin. } \varpi}{\text{Cof. } \varpi} \times \left(\frac{F - k \text{ Sin. } \varpi}{\text{Cof. } \varpi^2}\right) + \frac{kQ\,dz \text{ Cof. } \overline{n'z - Mz}}{\text{Cof. } \varpi} + \frac{3A\,dz}{2K} \times \frac{m'(1 + 6) \text{ Sin. } \varpi \text{ . Cof. } \overline{n'z - Mz}}{\text{Cof. } \varpi\,(n' - M)}$, *F* étant une conftante ajoutée en intégrant, & qui dépend du rapport de $d\epsilon$ à dz, lorfque $z = 0$.

Maintenant, on observera que la précession des Equinoxes étant de $50''$ par an, on a $\frac{F}{\text{Cos}.\,\varpi^2} - \frac{k\,\text{Sin}.\,\varpi}{\text{Cos}.\,\varpi^2} = M = \frac{1}{6\,.\,12\,.\,360}$. De plus, on a trouvé (*art.* 43) $dP = -d\epsilon\,\text{Sin}.\,\pi + k\,dz$; mettant donc dans cette équation, pour $d\epsilon$ sa valeur trouvée ci-dessus, on aura $dP = (-F\,\text{Sin}.\,\varpi + k) \times \frac{dz}{\text{Cos}.\,\varpi^2}$, en négligeant les petits termes qui contiendroient le Cosin. de $n'z - Mz$; or quelle que soit la valeur de dP, il est certain (*art.* 52) que le terme constant doit être $-dz \times 365\frac{1}{4}$. Donc $\frac{F\,\text{Sin}.\,\varpi - k}{\text{Cos}.\,\varpi^2} = 365\frac{1}{4}$; de-là & de l'équation déja trouvée entre F & k, l'on tire aisément $k = -365\frac{1}{4} + \frac{\text{Sin}.\,\varpi}{6\,.\,12\,.\,360}$, & $F = -365\frac{1}{4}\,\text{Sin}.\,\varpi + \frac{1}{6\,.\,12\,.\,360}$: l'on voit donc que k est un fort grand nombre négatif, étant à peu près $= -365\frac{1}{4}$, & que $\frac{F - k\,\text{Sin}.\,\varpi}{\text{Cos}.\,\varpi^2} = \frac{1}{6\,.\,12\,.\,360}$; donc k est un très-grand nombre par rapport à $\frac{F - k\,\text{Sin}.\,\varpi}{\text{Cos}.\,\varpi^2}$, & par conséquent on peut supposer $d\epsilon = \frac{1}{6\,.\,12\,.\,360}\,dz + \left(\frac{3A\,(1+\zeta)\,\text{Sin}.\,\varpi\,.\,m'}{\text{Cos}.\,\varpi\,.\,2K\,(n' - M)} + \frac{kQ}{\text{Cos}.\,\varpi}\right) dz\,\text{Cos}.\,n'z - Mz$. D'où

il est évident que kdz est incomparablement plus grand que $d\epsilon$, & que par conséquent les deux derniers termes du second membre de l'équation Z peuvent se réduire à $k\,d\epsilon\,dz$ Cof. π; donc en négligeant dans cette équation les termes qui renferment des Sinus & Cosinus d'autres angles que $n'z - Mz$, elle deviendra $dd\pi = \frac{3A(2+6)}{2K} \times \text{Sin. } \pi \text{ Cof. } \pi + \frac{k \text{ Cof. } \pi dz^2}{6.12.360} + k \text{ Cof. } \pi \times$ Cof. $n'z - Mz \times \left(+\frac{kQ}{\text{Cof. } \varpi} + \frac{3A\, m'\,(1+6)\text{ Sin. } \varpi}{2K \text{ Cof. } \varpi (n' - M)}\right) + \frac{3A\,(1+6)\,m'\,(1 - 2\text{ Cof. } \pi^2)}{2K}$ Cof. $n'z - Mz$, en mettant pour Sin. $\delta - U' + n'z - Mz$, ou Sin. $90° + n'z - Mz$ sa valeur Cof. $n'z - Mz$. Supposant à présent $\pi = \varpi + q$, & regardant q comme une quantité fort petite, on aura Sin. π Cof. $\pi = \frac{\text{Sin. } 2\varpi}{2} + q$ Cof. 2ϖ; Cosin. π = Cosin. $\varpi - q \times$ Sin. ϖ. Soit donc fait $\frac{3A\,(2+6)\text{ Sin. } \varpi \text{. Cof. } \varpi}{2K} + \frac{k \text{ Cof. } \varpi}{6.12.360} = -L$; $\frac{3A}{2K}(2+6) \times$ Cof. $2\varpi - \frac{k \text{ Sin. } \varpi}{6.12.360.} = -N^2$, & $+ kkQ + \frac{m'k.\,3A\,(1+6)\text{ Sin. } \varpi}{2K\,(n' - M)} = -R$, en négligeant le coefficient $3A\,(1+6) \times \frac{m'(1 - 2\text{ Cof. } \pi^2)}{2K}$ qui est nul par rapport aux autres, à cause de $k = -365\frac{1}{4}$, & de

$\frac{1}{n'-M}$ égal à environ 18 ; ce qui donnera l'équation

$ddq + N^2qdz^2 + Ldz^2 + Rdz^2 \text{ Cof. } n'z - Mz = 0.$

Si on intégre cette équation par la Méthode que j'ai donnée *Mém. Acad.* 1745, en fuppofant $q = \delta$, & $\frac{dq}{dz} = n$ lorfque $z = 0$, on trouvera . . . . . .

$q = \frac{n}{N} \text{ Sin. } Nz + \delta \text{ Cof. } Nz + \frac{L \text{ Cof. } Nz}{NN} - \frac{L}{NN} - \frac{R \text{ Cof. } n'z - Mz}{NN - (n'-M)^2} + \frac{R \text{ Cof. } Nz}{NN - (n'-M)^2}$: or puifque $\pi = \varpi + q$, ou $\varpi - Q \text{ Cof. } n'z - Mz$, il s'enfuit 1°. que ne fuppofant pas $N^2 = 0$, on aura $n = 0$, $L = 0$, d'où l'on tire $\frac{3A(2+\epsilon) \text{ Sin. } \varpi}{2K} = \frac{-k}{6.12.360}$, & $N^2 = \frac{k \text{ Sin. } \varpi}{6.12.360} + \frac{k \text{ Cof. } 2\varpi}{\text{Sin. } \varpi . 6.12.360} = \frac{k}{\text{Sin. } \varpi . 6.12.360} \times (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{ Cof. } 2\varpi) = \frac{k \text{ Cof. } \varpi^2}{\text{Sin. } \varpi . 6.12.360}$, d'où l'on voit que N^2 eft une fraction affez petite ; 2°. on aura $Q = \frac{R}{NN - (n'-M)^2}$, ou $Q(NN - n'n') = R$; de plus, δ doit être $= - Q$, puifque δ eft $=$ à ce que devient q lorfque $z = 0$; 3°. $\delta + \frac{R}{NN - (n'-M)^2}$ doit être $= 0$; ce qui donne encore la même équation $Q(NN - n'n') = R$, ou $- Q \times (NN - n'n') = + kkQ - \frac{kk(1+\epsilon)m'}{6.12.360.(2+\epsilon) \times (n'-M)}$,

d'où l'on voit que $\frac{1+\zeta}{2+\beta}$ ſera à peu près $= \frac{Q\,.\,(n'-M)}{m'} \times 6\,.\,12\,.\,360$, c'eſt-à-dire que $\frac{1+\zeta}{2+\beta}$ ſera $\doteq$ à la même quantité que nous avons trouvée (*art.* 54). Mais comme dans cette hypotheſe, $2+\beta$ ſeroit $= 3 + \frac{1}{3}$, $\frac{3A}{2K} \times$ Sin. ϖ ſeroit $= \frac{-k}{6\,.\,12\,.\,360} \times \frac{3}{10}$, & comme $k =$ environ $-365\frac{1}{4}$, il s'enſuivroit que les termes que nous avons négligés ne devroient pas l'être ; car le terme par ex. qui renfermeroit Coſ. $2z + 2Mz$, en faiſant $U = 0$, auroit pour coefficient $-\frac{3A\,.\,\text{Sin.}\,\varpi\,.\,\text{Coſ.}\,\varpi\,.\,\text{Coſ.}\,2z+2Mz}{2K\,(NN-4)}$ c. à d. environ $\frac{k \times \text{Coſ.}\,\varpi}{6\,.\,12\,.\,360\,.\,4} \times \frac{3}{10} \doteq \frac{1}{60\,.\,40}$ à peu près : or ce coefficient eſt beaucoup plus grand que le coefficient Q, qui ſuivant les obſervations eſt $\frac{9''}{57^{\circ}} =$ environ $\frac{1}{60\,.\,60\,.\,6\frac{1}{3}}$. Ainſi l'action du Soleil devroit produire dans l'Axe de la terre une nutation bien plus ſenſible que la Lune, ce qui ſeroit contraire aux obſervations.

Nous avons ſuppoſé dans le calcul précedent, que N^2 n'étoit pas $= 0$; voyons maintenant ce qui doit arriver ſi $N^2 = 0$. On aura en ce cas $ddq + Ldz^2 + Rdz^2$ Coſ. $n'z - Mz = 0$; d'où il s'enſuit que L doit être $= 0$, autrement l'inclinaiſon de l'Axe varieroit

fenfiblement au bout de quelques révolutions. Or en jettant les yeux fur les valeurs de L & de N^2, on verra facilement que l'une étant $= 0$, l'autre ne le fçauroit être. Donc la Méthode que je viens d'expofer, donne des réfultats fort contraires au fyftême de l'Attraction, au lieu que les réfultats trouvés par la Méthode du Chapitre IV, font très-conformes à ce fyftême. Comment donc accorder tout cela?

84. Pour trouver le dénouement de cette difficulté, on remarquera que les calculs des deux articles précedens, portent fur une fuppofition tacite qui eft fauffe, fçavoir que la quantité $d(d\epsilon \text{ Cof. } \pi^2)$ foit du même ordre que la quantité $d(kdz \text{ Sin. } \pi)$; en effet, fi on regarde la quantité $d(d\epsilon \text{ Cof. } \pi^2)$ comme d'un ordre infiniment plus petit que $d(kdz \text{ Sin. } \pi)$, ainfi qu'elle l'eft en effet, alors $d\epsilon$ doit être traitée comme nulle dans la premiere des équations de l'*art.* 83, & cette équation ne doit point être comparée avec celle qui renferme la valeur de $d\epsilon$ trouvée par les obfervations; mais il faudra effacer dans l'équation tirée de la Théorie, les termes où fe trouvent $d\epsilon$ & F, comme étant nuls par rapport aux autres, & comparer l'équation reftante avec celle qui donne la valeur de Sin. π, & qui réfulte des obfervations. Alors la Théorie & les obfervations feront d'accord, comme on l'a vû (*article* 52), & on trouvera que la folution conviendra avec celle de cet *art.* 52, fur l'exactitude de laquelle fa fimplicité & fa facilité ne doit laiffer aucun doute. D'ailleurs on

remarquera, que suivant les formules A' & B' des *articles* 78 *&* 79 qui ont été déduites de cette solution, on trouve sans aucune difficulté la nutation de l'Axe & la précession des Equinoxes; or l'exactitude de ces formules A' & B' sera confirmée dans le Chapitre suivant par une autre Méthode.

Au reste, on voit par cet exemple combien il est facile de se tromper dans la solution des Problêmes, où on néglige de petites quantités; & combien, par conséquent, on doit apporter de discernement dans le choix des moyens qu'on emploie pour les résoudre.

Il est pourtant assez singulier que la Méthode fautive que nous venons d'exposer, donne la même valeur de $\frac{1+\zeta}{2+\zeta}$ qui a été trouvée (*art.* 54) par une Méthode exacte. On peut encore trouver la même expression, en comparant l'équation de $d\varepsilon$ tirée de la solution précedente, sçavoir $\frac{kQ}{\text{Cos.}\,\varpi} - \frac{k(1+\zeta)m'}{(n'-M)\,\text{Cos.}\,\varpi\,(2+\zeta)\times(6.12.360)} \times$ Cos. $n'z - Mz$ avec l'équation $\frac{Q(n'-M)\,\text{Sin.}\,\varpi}{\text{Cos.}\,\varpi}$ tirée des observations. J'ai retrouvé encore la même chose en intégrant les équations Y & Z, par une autre Méthode qu'il est inutile d'exposer ici, parce qu'elle est fautive par la même raison que la précedente, quoique la valeur de $\frac{1+\zeta}{2+\zeta}$ qui en résulte soit exacte.

CHAPITRE

CHAPITRE XI.

Autre méthode pour résoudre le Problême de la précession des Equinoxes.

OBSERVATIONS PRÉLIMINAIRES.

85. AVANT que de passer à cette seconde méthode, nous observerons qu'il a été démontré ci-dessus 1°. que l'Axe de rotation instantanée de la terre est sensiblement le même (*art.* 77) que si la terre étoit un globe ; 2°. que les équations Y & Z de l'*article* 45, sont celles qui conviennent au mouvement de la terre, dans l'hypothese qu'elle soit regardée comme un globe. Ainsi ces équations, aussi-bien que les équations A' & B' des *articles* 78 & 79, qui en résultent, peuvent être regardées comme suffisantes pour déterminer l'Axe de rotation de la terre à chaque instant.

Nous allons donc dans les recherches suivantes considérer la terre comme un globe, & trouver par une nouvelle méthode la position de son Axe de rotation, & la vitesse de rotation autour de cet Axe.

Il faut bien remarquer que nous ne regardons ici la terre comme un globe, que pour n'être pas obligés d'avoir égard à la petite différence insensible qui doit se trouver entre les deux Axes de rotation dans l'hypothese que la terre soit un globe, & dans l'hypothese qu'elle soit un Sphéroide. Car nous aurons égard d'ail-

leurs à la figure réelle de la Terre, en confidérant l'action du Soleil & de la Lune qui altére à chaque inftant fon mouvement de rotation primitif.

Nous avons démontré (*art.* 1), que la direction de cette action eft toujours dans le plan d'un Méridien; par conféqûent la direction de cette action coupe l'Axe de la terre en quelqu'un de fes points : de plus, cette direction eft parallele (*art.* 1) à la ligne menée du centre de la Terre au centre du Soleil, ou de la Lune.

C'eft pourquoi, comme l'Axe de la Terre ou du Sphéroide qui la forme eft une ligne fixe & invariable, nous fuppoferons dans les recherches fuivantes, que la Terre eft un globe *PKpO* (Fig. 43) dans lequel il y a un diamétre ou ligne fixe *PCp*, dont quelque point *M* eft toujours follicité fuivant *BA* parallele à *CS*, par une force dont la quantité & dont la pofition font connues. Il eft certain que quelque mouvement qu'on fuppofe à ce globe autour du centre *C*, il aura toujours à chaque inftant un Axe de rotation (*art.* 72); que cet Axe demeureroit toujours le même, fi la force fuivant *BA* étoit nulle; & que la viteffe de rotation demeureroit auffi toujours conftante. Mais l'action de la force fuivant *BA* produit néceffairement quelque changement dans l'Axe de rotation & dans la viteffe : changement qui eft fort petit à chaque inftant, fi la force fuivant *BA* eft très-petite par rapport à la force de rotation. Nous allons déterminer la quantité de ce changement par le moyen des Propofitions fuivantes.

LEMME V.

86. *Soit un corps* PKO (Figure 38) *dont le centre de gravité soit* C, CQ *une ligne tirée à volonté par le centre* C, KCN *un plan perpendiculaire à* CQ; *& soit menée dans ce plan une ligne perpendiculaire à* KN, *& que l'on prendra pour l'Axe du corps; desorte que* PKO *représente la section de ce corps par un plan perpendiculaire à l'Axe. Je dis que si tous les points* G *du solide sont animés par une même force* φ *qui agisse suivant une direction parallele à* CQ, *& outre cela par des forces* GF, *dont la direction soit perpendiculaire aux distances des points* G *à l'Axe, & parallele au plan* PKO, *& qui soient proportionnelles à ces distances; la direction de la force unique qui résulte de toutes celles-là, sera parallele à* CQ, *& que cette force sera* $= \int G \times \varphi$, *c'est-à-dire sera la même que si les forces suivant* GF *étoient nulles.*

Car si on décompose chacune des forces *GF* en deux autres, l'une suivant *GZ*, parallele au plan *KN*, l'autre suivant *GS* perpendiculaire à ce plan; on verra que nommant π la force qui agit à la distance 1 du centre *C*, la force qui agit en *G* suivant *GF* sera $\pi \times CG$, & que par conséquent les forces suivant *GS* & *GZ*, feront $\frac{\pi . CG \times GS}{GI}$ & $\frac{\pi \times CG \times s^I}{GI}$, c'est-à-dire (à cause des triangles semblables *GCS*, *SGI*) $\pi . GV$, & $\pi . GS$. Or par la propriété du centre de gravité $\int \pi . G . GS = 0$. par conséquent la force qui résulte des forces suivant *GZ*

eſt nulle. Donc la force que nous cherchons, eſt la même que celle qui réſulte des forces des points G parallélement à CQ, & des forces GS des mêmes points G. Donc cette force a une direction parallele à CQ ou GS; & elle eſt égale à $\int\varphi . G + \int\pi . G . GV$: or $\int\pi . G \times GV = 0$ par la propriété du centre de gravité. Donc &c.

COROLL. I.

87. Soit PKO (Figure 39) un ſolide de révolution formé par la rotation d'une figure PRp autour d'une ligne Pp placée comme on voudra par rapport à la ligne CQ, & imaginons la ſection $PRpCQ$ qui paſſe par les lignes Pp & CQ; je dis que la direction BA de la force réſultante des forces φ & $\pi . CG$ ſera dans le plan $PRpCQ$.

Pour le démontrer, ſoit menée RC perpendiculaire à Pp; il faut décompoſer la force de rotation $\pi . CG$ de chaque particule en deux, l'une parallele à PC, l'autre parallele à RC; l'on verra d'abord que ces dernieres forces ont une direction parallele dans la partie RPO du ſolide, & comme le plan RPO diviſe cette partie en deux portions ſemblables & égales, la force réſultante de toutes ces forces ſera dans le plan RPO & perpendiculaire à PC; on prouvera par le même raiſonnement, que la force réſultante des forces paralleles à CP dans la partie RPO du ſolide, aura ſa direction dans le plan RPO, & ſera parallele à PC: il en ſera de même dans l'autre partie RpO; enfin, ſi on di-

vise la force constante φ de chaque particule en deux autres forces φ' & φ'' paralleles à PC & à RC, on verra que les forces qui en résultent dans chaque portion RPO, RpO, sont l'une & l'autre dans le plan PKO : donc la force unique qui résulte de toutes celles-là sera dans le plan PKO.

Je ne parlerai dans la suite que des solides de révolution, je n'aurai même besoin que du cas où ces solides sont des globes, ou peuvent être considérés comme tels.

J'appellerai dorénavant la section PRp, faite par l'Axe Pp, *un Méridien.*

COROLL. II.

88. Soit BMA (Fig. 38) la direction de la force qui résulte de toutes celles des points G, & que je nomme F; je dis que $F \cdot CM$ sera $= \int \pi \cdot G \cdot CG^2$. Car puisque la force F que je suppose agir suivant BA résulte de toutes les forces des points G, il s'ensuit que si au lieu de cette force on en supposoit une égale qui agît suivant AB, le corps PKO resteroit en équilibre, & qu'il y resteroit encore dans la même hypothese, si le point C ou l'Axe du corps étoit fixement attaché. Or dans ce dernier cas, la somme des momens des points G seroit $= \int G \cdot \varphi \cdot CS + \int G \cdot \pi \cdot CG \cdot CG =$ par la nature de l'équilibre, à $F \cdot CM$. or $\int G \cdot \varphi \cdot CS = 0$. Donc &c.

COROLL. III.

89. Donc si le corps PKO est animé par les forces dont nous avons parlé dans l'énoncé du Lemme précedent, il ne pourra être retenu en équilibre que par une force F qui soit égale à $\int \varphi . G$, qui agisse suivant AB dans le Méridien PKO parallélement à la direction de la force φ, & enfin dont la distance CM au point C, soit $= \frac{\int \pi . G . CG^2}{\int \varphi . G}$.

COROLL. IV.

90. Si le corps PKO (Figure 39) composé de quatre parties égales & semblables, PR, Rp, pO, OP, obéissoit à l'action des forces φ & $\pi . CG$, il seroit mû en ligne droite suivant CQ, & tourneroit en même tems autour de son Axe. Or nous venons de voir que la force F agissant suivant AB fait équilibre aux forces φ & $\pi . CG$, & retient le corps en repos. Donc si la force F agit suivant BA, elle produira deux mouvemens, l'un suivant CQ parallele à BA, tel que la force φ qui anime toutes les parties G, soit $\frac{F}{\int G}$, l'autre de rotation autour d'un Axe perpendiculaire au plan BMC ou MCQ, & qui sera tel que la force de rotation π à la distance 1, sera $= \frac{F . MC}{\int G . CG^2}$.

Remarque.

91. Nous croyons devoir faire à l'occaſion des propoſitions précedentes, quelques remarques qui ne ſeront point inutiles en elles-mêmes, quoique peu néceſſaires pour ce que nous avons à dire dans la ſuite.

Imaginons, comme dans l'*article* 87, un ſolide de révolution formé par la rotation de la figure *RPp* (Fig. 39) autour de *Pp*, & ſuppoſons que ce ſolide de révolution tourne autour d'un Axe perpendiculaire au plan *PKO*; ſuppoſons même pour rendre la choſe plus ſimple, que non-ſeulement *PR* ſoit = & ſemblable à *PO*, comme cela doit être néceſſairement, mais auſſi = & ſemblable à *Rp*. Il eſt certain que ce corps pourra tourner uniformément autour de ſon Axe de rotation, parce que les forces centrifuges des particules ſe détruiront mutuellement; & ſi on décompoſe ces forces en deux autres paralleles à *RC* & à *CP*, il eſt évident que ces nouvelles forces ſeront auſſi en équilibre, enſorte qu'elles ne produiront dans le corps aucun mouvement; auſſi trouvera-t-on facilement que la force réſultante des forces paralleles à *RC* eſt nulle, & qu'il en eſt de même de la force réſultante de celles qui ſont paralleles à *CP*. Cependant ſi on décompoſe de même les forces de rotation en forces paralleles à *CP* & à *CR*, on trouvera auſſi que chacune des forces réſultantes eſt nulle, & néanmoins cette *nullité* des forces réſultantes n'indique pas l'équilibre entre les forces de

rotation, puisque les forces de rotation produisent dans le corps un mouvement réel. Comment se peut-il faire que dans le premier cas il y ait équilibre entre les forces résultantes, & que dans le second il n'y en ait pas, quoique dans l'un & l'autre cas la somme des forces résultantes soit $= 0$?

Pour résoudre cette difficulté, on n'a qu'à considérer un lévier *ABD* (Fig. 40) sur lequel agissent les forces égales *DE*, *AC*; il est certain que quoiqu'il n'y ait pas d'équilibre entre les forces *DE*, *AC* cependant comme ces forces sont égales & de directions contraires, la force qui en résulte est nulle. Mais si ces forces étoient égales & de directions contraires, & outre cela dans la même ligne, comme sont les forces centrifuges des points *A*, *D*, alors non-seulement la force résultante seroit nulle, mais il y auroit équilibre entre ces forces. Il est aisé d'appliquer cette remarque aux forces centrifuges & aux forces de rotation des parties d'un corps solide.

En général, pour que le lévier *AB* soit en équilibre, il faut que non-seulement la somme des forces appliquées en *A* & en *B*, soit $= 0$, mais encore que la somme de leurs momens soit $= 0$; or quand les deux puissances ont des directions contraires & sont de différens côtés du point d'appui, alors une de ces puissances, & sa distance au point d'appui sont l'une & l'autre négatives; ainsi la somme des momens n'est pas $= 0$, mais elle est une quantité positive.

Voici

Voici encore une autre difficulté qui paroît mériter une solution. Nous ferons cette difficulté sur le mouvement du lévier *AD*, parce que ce sera la même chose pour un corps solide. Si toutes les parties de ce lévier, outre le mouvement de rotation autour de *B* ont un mouvement $= BG$ perpendiculaire à *AD*, il est certain que pour avoir la force résultante du mouvement de chaque partie, il faudra combiner la force qui résulte du mouvement parallele à *BG* avec la résultante du mouvement de rotation : or cette derniere force est $= 0$, & la premiere a pour direction *BG*. Pourquoi donc la force résultante n'a-t-elle pas pour direction *BG*, mais une ligne *bg* qui est entre les points *A* & *B*, comme on doit le conclure des Lemmes précedens ?

En premier lieu, il est aisé de voir que la force totale *AK* du point *A* étant plus grande que la force *DO* du point *D*, la force unique *bg* qui en résulte, doit se trouver plus près de *A* que de *D*. Mais pour répondre d'une maniére plus directe à l'objection, on remarquera que les forces paralleles & égales *AC*, *DE* peuvent être censées concourir à une distance infinie *a* du point *B* dans la ligne *BG* infiniment prolongée, ensorte qu'on peut regarder les forces égales *AC*, *DE*, comme appliquées en *a* suivant *aS* & *aQ*, & faisant des angles infiniment petits & égaux avec *Ba*. Or de ces deux forces égales, il résulte une force infiniment petite dont la direction *aP* est perpendiculaire à *Ba*; ensorte que la force qui résultera de la force sui-

vant aP & de la force ſuivant BG, fera un angle infiniment petit avec aB. Donc la direction de cette force ſera parallele à Ba, & viendra couper AB à une diſtance finie Bb du point B.

COROLL. V.

92. Si dans le plan PKO (Fig. 41) on ſuppoſe une force ba, que j'appelle F', & qui ſoit telle que $F' \times Cm = F \times CM$; cette force produira le même mouvement de rotation que la force BA. Il n'y aura de différence que dans la quantité & la direction du mouvement parallele que ces deux forces produiront. On peut donc ſubſtituer à la force BA une force ba qui agiſſe dans le même plan & qui ait le même moment, & une force qui paſſe par le centre C, & qui ait la valeur & la direction convenables. Ces deux forces réunies produiront abſolument le même effet que la force ſuivant BA; & ſi on veut n'avoir égard qu'au mouvement de rotation, on peut même faire abſtraction de la ſeconde. Cette remarque nous ſervira beaucoup dans la ſuite.

Je vais encore faire voir d'une autre maniére, que l'on peut ſubſtituer la force ſuivant ba à la force ſuivant BA, pour déterminer le mouvement de rotation que le corps PKO doit prendre autour du centre C. En effet, ſoit a (Fig. 42) le point où la direction de la force BA eſt coupée par la direction de la force ba; il eſt certain que ſi la force ba, au lieu d'agir de b

vers g agissoit de g vers b, & que le point C fût fixe, les forces suivant ab & suivant aA ou BA seroient en équilibre autour du point C, puisque par l'hypothese ces forces sont entr'elles en raison inverse de leurs distances au point C; donc si on réduit les forces suivant ab, & suivant aA à une force unique, la direction de cette force doit passer par le point C, & sera par conséquent la ligne aC. Donc puisque la force suivant aC résulte des forces suivant ga & aA, on peut regarder la force suivant aA comme composée de la force suivant aC, & d'une force suivant ag, égale & contraire à la force suivant ga. Donc au lieu de la force suivant BA, on peut substituer la force suivant ba, & une autre force suivant aC. Or la direction de cette derniere force passant par le centre de gravité du corps, elle ne produira aucune rotation. Donc la rotation que les forces suivant BA & suivant ba, tendent à produire, sera la même, & par conséquent on peut à cet égard substituer une de ces forces à l'autre.

COROLL. VI.

93. De-là il s'ensuit, que si la terre considérée comme un globe tourne autour d'un de ses diamétres quelconques Qq (Fig. 44), on pourra substituer à la force de rotation de chacune de ses parties une force unique, qui agisse en tel point λ qu'on voudra du plan $LVlu$ perpendiculaire à l'Axe Qq, & dont la direction soit

perpendiculaire au rayon $C\lambda$, & soit dans le plan $LVlu$. A l'égard de la grandeur de cette force, elle dépendra de la force de rotation & de la longueur du lévier $C\lambda$, & nous la déterminerons plus bas ; mais comme le rayon $C\lambda$ est arbitraire, nous supposerons pour simplifier les calculs, que le point λ tombe à l'extrémité L du rayon, ensorte que $CL = C\lambda$.

PROBLÊME VI.

94. *Soit* QLql (Fig. 45) *un des grands cercles d'un globe, & soit imaginée une force* L *appliquée au point* L *perpendiculairement au plan* QLql : *soient de plus appliquées en un point quelconque* R *du cercle* QLql *deux autres forces, l'une que j'appelle* R, *& qui soit perpendiculaire au plan* QLql, *l'autre que j'appelle* ϱ, *& qui agisse dans le plan* QLql, *suivant la direction de la tangente* RO ; *on demande quel doit être l'Axe de rotation du corps.*

1°. Puisque les forces R & L sont paralleles l'une à l'autre, & perpendiculaires au plan QLq, on joindra la ligne LR ; & faisant $LH : HR :: R : L$, on pourra substituer au lieu des deux forces R, L une seule force au point H, laquelle soit $= R + L$ & perpendiculaire au plan QLq ; 2°. au lieu de cette force placée en H, on pourra (*art.* 92) en substituer une autre placée en h, & qui soit $= \frac{(R+L) \times CH}{Cb}$; 3°. au lieu de la force ϱ qui agit suivant RO, on pourra substituer (*art.* 92)

une force qui agiſſe au point h perpendiculairement à Ch, & qui ſoit $= \frac{\varrho \times CR}{Ch} = \varrho$.

On a donc réduit les trois forces L, R, ϱ, à deux autres qui agiſſent ſur le point h, & dont les directions & les quantités ſont connues. Donc on réduira aiſément ces forces en une ſeule, dont on connoîtra la quantité & la direction; cela fait, on trouvera l'Axe de rotation par l'*art.* 90, car cet Axe ſera perpendiculaire au plan qui paſſe par le centre C, & par la direction de la force unique à laquelle les forces L, R, ϱ, auront été réduites.

COROLL. I.

95. Si les forces R & ϱ ſont très-petites par rapport à la force L, on aura $LH =$ à très-peu près $\frac{R \times LR}{L}$. Donc menant les perpendiculaires RV, HK, on aura $CK = \frac{R \times CV}{L}$; & ſi le point R eſt en Q ou fort près du point Q, on aura $CK = \frac{R \times CQ}{L}$.

COROLL. II.

96. Si le point R (Fig. 46) eſt fort près du point Q, enſorte que l'angle LCR ſoit preſque droit; & qu'on mene dans le plan LCQ une ligne BCS ſur laquelle on abbaiſſe les perpendiculaires LB, HO, RS, on aura $BO = \frac{R \times BS}{L}$. Or nommant CS, y', on trouvera $BC =$

$\sqrt{[1-y'y']}$, & par conféquent $BO = \frac{(y' + \sqrt{[1-y'y']}) \times R}{L}$; de même on aura en menant la parallele QI à BS, $LI = LB - QS = y' - \sqrt{[1-y'y']}$, & $Ll = \frac{LI \times R}{L} = \frac{R}{L} \times (y' - \sqrt{[1-y'y']})$.

C O R O L L. III.

97. Donc comme les lignes Ll & BO ou Hl font fort petites, on aura $CL - CH = \frac{Ll \times LB + BO \times CB}{CL} = \frac{R}{L} \times (y'y' - y'\sqrt{[1-y'y']} + y'\sqrt{[1-y'y']} + 1 - y'y') = \frac{R}{L}$. Donc Hh (Fig. 47) $= \frac{R}{L}$; donc $Oo = \frac{R}{L} \times \sqrt{[1-y'y']}$, & par conféquent $Bo = \frac{Ry'}{L}$, & $Co = \sqrt{[1-y'y']} - \frac{Ry'}{L}$.

C O R O L L. IV.

98. Nous avons vû que la force appliquée en h perpendiculairement au plan CLQ, eft $\frac{(R+L) \times CH}{Ch}$, donc cette force $= (R+L) \times (1 - \frac{R}{L})$ à très-peu près.

C O R O L L. V.

99. Comme la force appliquée en h fuivant la tangente de l'Arc hL eft $= \varrho$, & qu'elle eft regardée comme infiniment petite par rapport à la force appliquée

en h perpendiculairement au plan LCQ ; il s'enſuit que la force réſultante de ces deux-là, doit être regardée comme égale à la ſeconde de ces deux forces, puiſqu'elle n'en différera que d'une quantité de l'ordre de ϱ^2, comme il eſt facile de le voir. Donc la force appliquée au point h peut être ſuppoſée $= (R + L) \times (1 - \frac{R}{L})$.

COROLL. VI.

100. Soit $uhCV$ (Fig. 48) le plan du grand cercle dans lequel ſe trouve la force qui agit ſur le point h, & imaginons que l'Ellipſe NoG ſoit la projection de ce grand cercle ſur un plan perpendiculaire à LCQ, enſorte que le grand Axe NG de cette Ellipſe, ſoit la commune ſection du plan BNS perpendiculaire à LCQ, & du plan du grand cercle $uhCV$. Cela poſé:

1°. Il eſt clair qu'on peut imaginer (*art.* 92) que la force qui agit ſur le point h, eſt appliquée en tout autre point Z de la circonférence de ce grand cercle.

2°. Soit Cz (Figure 49) le petit Axe de l'Ellipſe NoG, & Z le point du cercle uhV, dont le point z eſt la projection, on verra que les angles GCZ, ZCN, ſeront droits auſſi-bien que zCG, & zCN ; & que ſi on mene une perpendiculaire CF au plan GZN, la projection CD de cette perpendiculaire ſera ſur la ligne zC prolongée vers D. D'où il eſt facile de conclure que l'angle FCD ſera le complément de l'angle ZCz, & que ſi on fait $CF = CZ = 1$, on aura $FD = Cz$.

COROLL. VII.

101. Il est visible que le point o (Fig. 48) seroit la projection du point h, & que ce point h seroit le point de milieu d'un demi cercle qui auroit Ch pour rayon, & qui étant perpendiculaire au plan LCQ, se termineroit sur le plan perpendiculaire à LCQ qui passe par BS; de plus, l'angle Lhu est presque droit, parce que la force suivant hL est (*hyp.*) infiniment petite : donc le demi cercle dont nous venons de parler, fait un angle très-petit avec le cercle uhV. Or l'Ellipse qui seroit la projection du premier de ces demi cercles, auroit Co pour petit Axe : donc le petit Axe Cz (Fig. 49) de l'Ellipse GzN qui est la projection du second de ces cercles, fait un angle infiniment petit avec Co. Donc Cz ne différe de Co que d'un infiniment petit du second ordre ; donc on peut supposer $Cz = Co$; donc (*art.* 100), on aura $FD = Co$.

COROLL. VIII.

102. La ligne CF (*art.* 90) est l'Axe de rotation du corps, car cette ligne est perpendiculaire (*constr.*) au plan du grand cercle GZN dans lequel se trouve la force qui agit sur le point h. Donc la distance FD qu'il y a de l'extrémité de l'Axe de rotation à $CD = Co = \sqrt{[1 - y'y']} - \frac{Ry'}{L}$; on a donc par cette proposition, un des Elémens FD qui servent à déterminer

la

la position de l'Axe de rotation. Il faut, de plus, trouver la position de Cz, ou, ce qui revient au même, l'angle oCz. C'est ce que nous allons déterminer par le moyen du Problême suivant, & de ses Corollaires.

PROBLÊME VII.

103. *Soit une demi Ellipse* GTS (Fig. 50), *qu'on peut regarder comme la projection d'un demi cercle* GpS *décrit du diamétre* GCS, *& dont le rayon* CS = 1; *on demande le rapport de l'Arc circulaire* Tt *décrit du centre* C, *à la différence* to *des lignes* CT, Co.

Ayant mené la perpendiculaire TV à GC, & nommé CT, y, Tt, dy, & l'angle GCT, v, on aura $TV = y \text{ Sin. } v$; & comme l'Ellipse est la projection d'un cercle GpS dont le rayon $Cp = 1$, il est évident, en menant la perpendiculaire Tp au plan GTS, & joignant pV, que l'angle pVT sera constant. Donc on aura $\frac{VT}{pT}$ constant, c'est-à-dire $\frac{y \text{ Sin. } v}{\sqrt{[1-yy]}}$ = à une constante. Donc différentiant & réduisant, on a $\frac{dy \text{ Sin. } v}{1-yy} = - ydv \text{ Cof. } v$: or $Tt = ydv$. Donc $\frac{to}{Tt}$ ou $\frac{dy}{dy} = \frac{-\text{Cof. } v\,(1-yy)}{\text{Sin. } v}$.

COROLL. I.

104. Donc si Co (Fig. 51) fait un angle très-petit

avec Cz, & que $\frac{to}{Tt} = p$, on aura $\frac{-\text{Cof. } GCo \times (1 - Cz^2)}{\text{Sin. } GCo} =$ p, c'eft-à-dire, à très-peu près Sin. $zCo = \frac{p}{1 - Cz^2}$.

COROLL. II.

105. Donc pour trouver dans la Figure 52 l'angle entre Cz & Co, il fuffit de connoître le rapport de Tt à to au point o. Or imaginant le triangle hMm dont l'hypothenufe Mh foit infiniment petite, & regardant les points T, t, comme la projection des points M, m, on aura 1°. $Tt = Mm$; 2°. $to = \frac{hm \times ho}{hC} = hm \times y'$; 3°. $hm : Mm :: \varrho : (R + L) \times (1 - \frac{R}{L})$; c'eft-à-dire à très-peu près $hm = \varrho \times \frac{Mm}{L}$. Donc $\frac{to}{Tt}$ ou $p = \frac{\varrho y'}{L}$; donc (*art. préced.*) l'angle zCo ou $\frac{p}{1 - Cz^2} =$ à très-peu près $\frac{\varrho}{Ly'}$, parce que $Cz = \sqrt{[1 - y'y']}$ à très-peu près.

LEMME VI.

106 *Les mêmes chofes étant fuppofées que dans l'article* 103, *je dis que fi le point* p (Fig. 50) *du cercle* GpS, *dont le point* T *eft la projection, eft pouffé perpendiculairement à* Cp *par une force proportionnelle au Sinus de* 2GCp, *le point* T *fera pouffé perpendiculairement à* CT *par une force proportionnelle au Sinus de* 2GCT *multiplié*

par CT, *c'est-à-dire qui sera à la force du point* p *comme le Sinus de* 2GCT *multiplié par le Cosinus de l'angle* TCp *est au Sinus de* 2GCp.

Car soit GCp ou $PCS = V$, & n Sin. $2V$ la force qui pousse le point p, on aura n Sin. $2V = n$ Sin. $V \times 2$ Cos. V, & cette force produira sur le point T une force suivant To qui se décomposera en deux autres Tt, & to: or le rapport du Cosinus de l'inclinaison, au Sinus total est $\frac{y \text{ Sin. } v}{\text{Sin. } V}$; & ce rapport est le même que celui du petit Secteur elliptique TCt, au Secteur circulaire correspondant $\frac{1 \times dV}{2}$, dont TCt est la projection. Donc $Tt \times CT$ ou $y \times Tt = dV \times \frac{y \text{ Sin. } v}{\text{Sin. } V}$; mais la force suivant Tt est à la force du point p comme Tt à dV. Donc la force suivant $Tt = 2n$ Sin. V Cos. $V \times \frac{\text{Sin. } v}{\text{Sin. } V} = n \times y$. Sin. $2v$, à cause que Cos. $V = y$ Cos. v (*art.* 15). Donc &c. *C. Q. F. D.*

COROLL. I.

107. Donc la force suivant $to = \frac{n \text{ Sin. } 2v \times to}{Tt} =$ (*art.* 103) n Sin. $2v \cdot y \times - \frac{\text{Cof. } v\,(1 - yy)}{\text{Sin. } v} = -2n \times y\,(\text{Cos. } v)^2\,(1 - yy)$. Le signe $-$ marque ici que la

direction de cette force, au lieu d'être de C vers t, comme elle le feroit, si dy étoit positif, est de t vers C; ainsi la force du point T vers C, est $2\lambda y$. Cos. $v^2 \times (1-yy)$.

R E M A R Q U E.

108. Il est bon de remarquer (ce qui nous sera utile dans la suite) que le quarré de l'Arc $dV = To^2 + d(V[1-yy])^2 = yydv^2 + dy^2 + \frac{yydy^2}{1-yy} = \frac{dy^2}{1-yy} + yydv^2$.

C O R O L L. II.

109. Imaginons (Fig. 53) un grand cercle $Kp\Delta$ perpendiculaire au plan GTS, & décomposons la force qui agit sur le point p en deux autres, dont l'une soit perpendiculaire au plan $Kp\Delta$, l'autre soit dans ce même plan & ait pour direction la tangente au point p; la premiere de ces forces qui est égale à la force du point T suivant Tt, sera ny Sin. $2v$; & la seconde qui est égale à la force suivant to multipliée par $\frac{1}{V[1-CT^2]}$, sera $2ny$. Cos. v^2. $(V[1-yy])$.

P R O B L E M E VIII.

110. *Trouver la force que le Soleil exerce sur l'extrémité* p *de l'Axe terrestre.*

Nous avons fait voir (*art.* 1) que cette force agit toujours dans un plan qui passe par l'Axe PCp, & l'on a vû (*art.* 10) que son moment par rapport au point C, ou, ce qui est la même chose, le produit de la quantité de cette force par sa distance au point C, est $\frac{3Sa \,.\, 4D \,.\, \text{Cos}\,V \,.\, \text{Sin}\,V}{u^3} \times \frac{4a^5}{15}$, ou plus généralement $\frac{3S}{u^3} \times A \,.\, \text{Cos}\,V \,.\, \text{Sin}\,V \times 4D$ (*art.* 13); or on peut (*art.* 92) supposer au lieu de cette force, une autre force appliquée au point p perpendiculairement à Cp dans le même plan CpS, & dont le moment soit le même par rapport au point C. Donc cette force appliquée en p sera $= \frac{3S}{u^3} \times \frac{A \times 4D \,.\, \text{Sin}\,V \,.\, \text{Cos}\,V}{Cp} = \frac{3S}{u^3} \times A \times 4D \times \text{Sin}\,V \times \text{Cos}\,V$, à cause que Cp est supposé $= 1$.

COROLLAIRE I.

111. Donc (*art.* 14) on aura par la même raison $\frac{3\lambda}{u'^3} \times A \times 4D \times \text{Sin}\,V' \times \text{Cos}\,V'$ pour l'expression de l'action que la Lune exerce sur le point p.

COROLL. II.

112. Donc l'action du Soleil sur le point p suivant la perpendiculaire au cercle pK, sera y Sin. $2v \times \frac{3S \,.\, 2D \times A}{u^3}$ (*art.* 109), & l'action du Soleil sur le point p

ſuivant une tangente au même cercle, ſera $\frac{3S \cdot 4D \cdot A}{u^3} \times y\sqrt{[1-yy]} \times \text{Coſ.}\, v^2$. Il eſt queſtion préſentement de décompoſer de même la force de la Lune ſur le point p en deux autres, dont l'une agiſſe perpendiculairement au plan $Kp\Delta$, & l'autre ſuivant la tangente de ce cercle en p. Cette décompoſition ne laiſſe pas d'avoir quelque difficulté, parce que l'orbite de la Lune n'eſt pas exactement dans le plan de l'Ecliptique. Nous allons la réſoudre dans le Corollaire ſuivant.

COROLL. III.

113. Soit comme dans l'*art.* 15, CL (Fig. 54) le rayon dans lequel la Lune eſt ſuppoſée ſe trouver, & qui eſt diſtant de l'Ecliptique de la quantité LM, ſoit P le Pôle de la terre, PK la perpendiculaire abbaiſſée du Pôle P ſur le plan de l'Ecliptique CMK, $K\sigma$ une perpendiculaire à CM, PR perpendiculaire à CR, & RQ perpendiculaire à CM, ou, ce qui eſt la même choſe parallele à LM; ſoit pris l'Arc Pp infiniment petit, & ſoient menées pr, pk, rq, paralleles à PR; PK, RQ; il eſt évident 1°. que KQ, kq feront des lignes paralleles, puiſque les plans KPR, kpr ſont paralleles; 2°. que le Secteur CPp eſt au Secteur KCk dans la raiſon de $PRrp$ à $KQqk$, c'eſt-à-dire comme $PR \times CL$ à $KQ \times CM \times \frac{K\sigma}{KQ}$; ou comme $PR \times CL$ à $K\sigma \times CM$.

Soit ensuite $CP = 1$, $CK = y$, l'angle $KC\sigma = v'$, l'angle $PCR = V'$, l'angle constant $KQ\sigma$ aura aussi une tangente constante que je nomme μ, & l'angle LCM en aura une que j'appelle p. De plus, il est évident que $PK - RQ$ sera en raison constante avec KQ, & par conséquent avec $K\sigma$. Or $K\sigma = y$ Sin. v, $PK = \sqrt{[1 - yy]}$, $RQ = CQ \times \frac{LM}{CM} = (y \text{ Cof. } v' + y\mu \times$ Sin. $v') \times p$; donc on aura . . . . $\frac{\sqrt{[1-yy]} - y \text{ Cof. } v' \times p - y\mu p \text{ Sin. } v'}{y \text{ Sin. } v'} =$ à une constante; d'où l'on tire, comme dans l'*article* 103, $\frac{dy}{d\gamma} = - \frac{\text{Cof. } v' (1 - yy) + py \sqrt{[1 - yy]}}{\text{Sin. } v'}$. De plus, par le rapport marqué ci-dessus entre les Secteurs PCp & KCk, on trouve $yd\gamma : Pp$ ou $dV' :: y$ Sin. v' : Sin. $V' \times \sqrt{[1 + pp]}$. Donc $\frac{d\gamma}{dV'} = \frac{\text{Sin. } v'}{\text{Sin. } V' . (\sqrt{[1 + pp]})}$. Or la force de la Lune sur le point P pour lui faire décrire l'Arc Pp, est $\frac{3A(1+\epsilon) . 4D . S}{u^3} \times$ Sin. V'. Cof. V'; donc les deux forces qui agissent sur le point K pour pousser ce point suivant une perpendiculaire à KC, & suivant KC, sont $\frac{3A \times 4D \times S(1+\epsilon)}{u^3}$ Sin. V'. Cof. $V' \times \frac{d\gamma}{dV'}$, & $\frac{3A}{u^3} \times 4D \times S(1 + \epsilon)$ Sin. V'. Cof. $V' \times \frac{d\gamma}{dV'} \times \frac{dy}{d\gamma}$; on

mettra dans ces deux quantités à la place de Cof. V' sa valeur $CQ\,(\sqrt{[1+pp]})$ ou $(y\,\text{Cosin.}\,v'+y\mu\,\text{Sin.}\,v')\times(\sqrt{[1+pp]})$, & l'on aura les expressions des deux forces : mais il faut encore en faire disparoître la quantité μ. Pour cela, on remarquera que l'on a par l'*article* 15 $\mu=\frac{p\sqrt{[1-yy]}}{y\,\text{Sin.}\,v'}$; donc les forces perpendiculaires à KC, & suivant KC, sont (en négligeant le quarré de p) $\frac{3A\,.\,4D\,(1+\zeta)\,.\,S}{u^3}\times\text{Sin.}\,v'\,(y\,\text{Cof.}\,v'+p\sqrt{[1-yy]})$, & $\frac{3A\times 4D\,(1+\zeta)\,.\,S}{u^3}\times\text{Sin.}\,v\times(y\,\text{Cof.}\,v'+p\sqrt{[1-yy]})\times\left[\frac{\text{Cof.}\,v'\,(1-yy)-py\sqrt{[1-yy]}}{\text{Sin.}\,v'}\right]$ ou $\frac{3A\,(1+\zeta)\,.\,4D\,.\,S}{u^3}\times(y\,\text{Cof.}\,v'^2\,(1-yy)-2pyy\sqrt{[1-yy]}\,.\,\text{Cof.}\,v+p\,\text{Cof.}\,v'\sqrt{[1-yy]})$: or (Fig. 53) la force perpendiculaire au plan $Kp\Delta$ est égale à la premiere de ces deux forces, & la force suivant la tangente du cercle $Kp\Delta$ en p, est égale à la seconde multipliée par $\frac{1}{\sqrt{[1-yy]}}$ (*art.* 109) ; donc la force perpendiculaire au plan du cercle $Kp\Delta$, sera $\frac{3A\,.\,4D\,(1+\zeta)\,.\,S}{u^3}\times\text{Sin.}\,v'\times(y\,\text{Cof.}\,v'+p\sqrt{[1-yy]})$, & l'autre force sera $\frac{3A\,(1+\zeta)\,.\,4D\,.\,S}{u^3}\times(y\sqrt{[1-yy]}\,.\,\text{Cof.}\,v'^2-2pyy\times\text{Cof.}\,v'+p\,\text{Cof.}\,v')$.

PROBLEME

PROBLEME IX.

114. *On suppose que tous les points d'une Sphere* PRpr (Fig. 60) *soient animés par des forces qui tendent à la faire tourner autour de l'Axe* Rr, *& qui soient par conséquent proportionnelles à leurs distances à cet Axe, & que* Ψ *soit la force qui agit à la distance* 1 *du centre* C; *on demande la somme des produits de chaque particule par sa force accélératrice & par sa distance à l'Axe* Rr.

Nous chercherons d'abord cette somme dans une surface Sphérique quelconque *LNOZ*. Pour cela nous nommerons la constante *CL*, *f*, la variable *LM*, *x*, & nous aurons $\frac{\Psi . NM}{CP}$ ou $\frac{\Psi \surd[2fx - xx]}{1}$ pour la force qui anime toutes les particules *Nn* situées à la distance *MN* de l'Axe; de plus, la somme de ces particules $= 2\pi f dx$, en nommant 2π la circonférence. Donc l'élément de leur produit par $\frac{\Psi . NM}{CP}$ & par *NM*, est $2\Psi\pi f \times (2fxdx - xxdx)$ dont l'intégrale complette, en mettant pour x la valeur $2f$, est $2\pi\Psi f(\frac{8f^3}{2} - \frac{8f^3}{3}) = \frac{8\pi\Psi f^4}{3}$; or multipliant cette quantité par df, & ensuite intégrant & faisant $f = a$, on aura l'intégrale cherchée $= \frac{8\pi\Psi a^5}{3 \cdot 5}$.

COROLLAIRE.

115. Donc l'intégrale cherchée eſt $= \frac{4\Psi a^5}{15} \times 4D$, & en général, ſi on ſuppoſe que f ſoient les rayons & Δ les denſités des différentes couches, on aura l'intégrale égale à $\frac{4}{15} 4D \Psi \times \int \Delta d (f^5) = 4D \times \Psi \times K$, en ſuppoſant $\frac{4}{15} \int \Delta d (f^5) = K$, comme dans l'*art.* 45.

Donc ſi Π eſt une force appliquée à l'extrémité p du rayon Cp & perpendiculaire au plan RPp, on aura (*art.* 90) $\Psi \times K \times 4D = \Pi \times 1$, & $\Psi = \frac{\Pi}{K \cdot 4D}$.

PROBLÊME X.

116. *Déterminer le changement que l'action du Soleil & celle de la Lune doivent produire dans la poſition de l'Axe* de rotation *de la terre, & dans la rotation de la terre autour de ce même Axe.*

Il eſt certain (*art.* 85) que quelque mouvement qu'on ſuppoſe à la terre autour de ſon centre, elle tournera toujours autour de quelque Axe CQ (Fig. 55) dont la poſition ſeroit conſtante, ſi l'action du Soleil & de la Lune étoient égales à zero : mais cette action fait changer l'Axe à chaque inſtant.

Je ſuppoſe donc que CQ ſoit l'Axe de rotation durant un inſtant quelconque dt, & j'imagine un plan

LCQ perpendiculaire au plan de l'Ecliptique, & dont la commune ſection avec l'Ecliptique ſoit BS.

Je ſuppoſe enſuite que p ſoit le Pôle de la terre, ou l'extrémité de ſon *Axe de figure* ; & comme j'ai fait voir (*article* 77) que ce Pôle eſt toujours à une très-petite diſtance du Pôle de rotation Q, & que d'ailleurs les forces appliquées en p ſont très-petites eu égard à la force de rotation, il s'enſuit qu'on peut ſuppoſer ces forces appliquées au point Q.

Donc la force ϱ du point Q ſuivant la tangente en Q, ſera $= \frac{dt \times 3A \,.\, 4D \,.\, S}{u^3} \times (y \,\text{Coſ.}\, v^2 \sqrt{[1-yy]} + [1+6] \times [y \,\text{Coſ.}\, v'^2 \,.\, \sqrt{[1-yy]} - 2pyy \,.\, \text{Coſ.}\, v' + p \,\text{Coſ.}\, v'])$, & la force R perpendiculaire à QCL, ſera $\frac{dt \,.\, 3A \,.\, 4D \,.\, S}{u^3} \times [y \,\text{Sin.}\, v \,\text{Coſ.}\, v + (1+6)[y \,\text{Sin.}\, v' \,.\, \text{Coſ.}\, v'] + (1+6) \times p \,\text{Sin.}\, v' \sqrt{(1-yy)}]$. Or faiſons (*art.* 43) $dt = \frac{u\,dz}{.\,g_1}$, & ſoit $\frac{k \,.\, g \times 1}{u}$ = à la viteſſe de rotation d'un point quelconque de l'Equateur terreſtre ; ſi on réduit toutes les forces de rotation de toutes les particules du globe, à une ſeule qui paſſe par le point L & qui ſoit perpendiculaire au cercle CLQ, cette force que j'ai ci-deſſus appellée L, ſera (*art.* 90 & 115) $\frac{kg}{u} \times 4D \times K$.

Cela poſé, ſoit Cz (Fig. 49) la projection de l'Axe de rotation dans l'inſtant ſuivant, & ſoit ſuppoſé l'angle

zCo ou son Sinus $= d\epsilon'$, on aura en mettant dans l'*article* 105 à la place de ϱ & L leurs valeurs trouvées ci-dessus, & y à la place de y' qui en différe très-peu, l'équation suivante . . . .

$$d\epsilon' = \frac{u\,dz}{g} \times \frac{3A \times S}{u^3} \times \frac{u}{kg \cdot K} \times (\sqrt{[1 - yy]} \times \text{Cof. } v^2 +$$

$$\sqrt{[1 - yy]}\,(1 + \beta)\ \text{Cof. } v'^2 + \frac{p\,(1 - 2yy)\ \text{Cof. } v'}{y}) : \text{or}$$

(*art.* 43) $p = - m'\zeta$. Nous en avons déja dit la raison dans cet *art.* 43, & afin qu'on n'ait aucun doute sur ce sujet, il n'y a qu'à supposer que la Lune soit au-dessus du plan de l'Ecliptique, au lieu que nous l'avons supposée au-dessous; en ce cas, on aura $p = m'\zeta$ sans aucune difficulté, mais les termes qui contiennent p dans l'équation doivent changer de Signe. C'est pourquoi, au lieu de $+ p$, on aura $- m'\zeta$, & au lieu de $- p$; $+ m'\zeta$: donc en général, il faut substituer $- m'\zeta$ à la place de p. De plus, $y = \text{Cof. } \pi$; $\sqrt{[1 - yy]} = \text{Sin. } \pi$; $gg = \frac{S}{u^2} \times u$: enfin $1 - 2\ \text{Cof. } \pi^2 = - \text{Cof. } 2\pi$; faisant ces substitutions, il viendra $d\epsilon' = \frac{3A}{k \cdot K}\ \text{Cof. } v^2 dz\ \text{Sin. } \pi +$

$$+ \frac{3A\ \text{Cof. } v'^2\ (1 + \beta)\ dz\ \text{Sin. } \pi}{k \cdot K}$$

$$- \frac{3A\,dz\,(1 + \beta)\ m'\zeta \times \text{Cof. } v' \times - \text{Cof. } 2\pi}{K \cdot k \cdot \text{Cof. } \pi}$$

Equation qui est précisément la même, que celle que nous avons trouvée dans l'*article* 79 par une autre mé-

thode ; parce que k eſt ici une quantité poſitive, au lieu que dans l'*article* cité elle étoit une quantité négative, deſorte que $+ k$ dans cette derniere équation eſt la même choſe que $- k$ dans l'autre.

Maintenant, nous avons trouvé par l'*art.* 102, $FD = \sqrt{[1 - y'y']} - \frac{Ry'}{L}$; d'où il s'enſuit que $- \frac{Ry'}{L}$ ou $\frac{-Ry}{L}$ eſt la différence de $\sqrt{[1 - y'y']}$, ou de la diſtance de l'extrémité de l'Axe de rotation au plan de l'Ecliptique, donc on aura $d(\sqrt{[1 - y'y']}) = - \frac{Ry'}{L}$, & ſubſtituant les valeurs de R & de L, il viendra . . . . .

$$d(\sqrt{[1 - y'y']}) = \frac{3A\,dz\ \text{Sin.}\ 2v\ .\ \text{Coſ.}\ \pi^2}{-2K\ .\ k}$$

$$+ \frac{3A\ (1 + \zeta)\ dz\ \text{Coſ.}\ \pi^2\ \text{Sin.}\ 2v'}{-2K\ .\ k}$$

$$- \frac{3A\ (1 + \zeta)\ m'\zeta\ .\ \text{Sin.}\ v'\ .\ \text{Coſ.}\ \pi\ .\ \text{Sin.}\ \pi\ .\ dz}{-K\ .\ k}$$

Equation qui revient au même encore, que l'équation A' de l'*article* 78.

Enfin, ſi on veut avoir l'équation de la viteſſe de rotation, on remarquera que la force L devient dans l'inſtant ſuivant $(R + L) \times (1 - \frac{R}{L}) = L - \frac{RR}{L}$ (*art.* 98) : or RR étant cenſée infiniment petite du ſecond ordre, il s'enſuit que la force de rotation ne change pas ſenſiblement, & que par conſéquent on peut regarder la viteſſe de rotation comme conſtante ; ce qui confir-

me ce que nous avons remarqué dans l'*article* 77, que la viteſſe de rotation de la terre n'eſt point ſenſiblement altérée par l'action de la Lune & du Soleil. Nous trouvons même ici que l'équation produite dans la viteſſe de rotation devroit être de l'ordre de *RR*, c'eſt-à-dire inſenſible par rapport à la préceſſion annuelle des Equinoxes qui eſt elle-même très-petite ; & ſi nous avons trouvé dans l'*article* 77, que cette équation dèvoit être du même ordre que la préceſſion des Equinoxes, quoique bien plus petite, c'eſt que nous conſidérions alors la rotation de la terre autour de ſon Axe de figure, qui n'eſt pourtant pas à la rigueur le véritable Axe de rotation : or c'eſt de ce dernier Axe *véritable* qu'il eſt ici queſtion.

CHAPITRE XII.

De la préceſſion des Equinoxes, en n'ayant point égard à la rotation de la terre autour de ſon Axe.

117. COMME cette hypotheſe, ainſi que celles que nous ferons dans le Chapitre ſuivant, n'eſt point conforme à ce qui ſe paſſe dans la nature, on pourroit regarder tout ce que nous allons dire, comme un pur jeu de Geométrie aſſez inutile à notre ſujet. Mais j'aurai ſoin de ne rien inférer dans ces deux Chapitres, qui ne ſoit ou néceſſaire pour ce que j'aurai à dire dans

la suite, ou au moins fort utile pour répandre un nouveau jour sur ce que j'ai déja dit.

En premier lieu, je remarquerai que si la terre ne tourne point autour de son Axe, on doit avoir $k = 0$, & qu'ainsi pour trouver la précession des Equinoxes dans cette hypothese, il suffit d'effacer dans les équations Y & Z de l'*article* 45, les termes où k se rencontre, ce qui donnera les deux équations suivantes . . .

$$\frac{3A\,dz^2\,\text{Sin.}\,2v\,.\,\text{Cof.}\,\pi^2}{2K} + \frac{3A\,(1+\varsigma)\,dz^2\,\text{Cof.}\,\pi^2\,.\,\text{Sin.}\,2v'}{2K}$$

$$- \frac{3A\,(1+\varsigma)\,\text{Sin.}\,v'\,.\,m'\zeta\,\text{Cof.}\,\pi\,.\,\text{Sin.}\,\pi\,dz^2}{K}$$

$$= d(d\epsilon\,\text{Cof.}\,\pi^2) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(C')$$

$$dd\pi = \frac{3A\,\text{Cof.}\,v^2\,dz^2\,\text{Sin.}\,\pi\,.\,\text{Cof.}\,\pi}{K}$$

$$+ \frac{3A\,\text{Cof.}\,v'^2\,dz^2\,(1+\varsigma)\,\text{Sin.}\,\pi\,.\,\text{Cof.}\,\pi}{K}$$

$$- \frac{3A\,dz^2\,(1+\varsigma)\,m'\zeta\,\text{Cof.}\,v'\,(1 - 2\,\text{Cof.}\,\pi^2)}{K}$$

$$- d\epsilon^2\,\text{Sin.}\,\pi\,.\,\text{Cof.}\,\pi \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(D')$$

Or je vais faire voir par une autre méthode, que ces équations sont en effet celles de la précession des Equinoxes & de la nutation de l'Axe de la terre, dans l'hypothese que la terre ne tourne pas autour de son Axe; ce qui servira de nouveau à confirmer nos formules générales.

Je remarquerai d'abord que k étant égale à zero dans cette hypothese, on a, par l'*article* 44, $dP = - d\epsilon \times$

$\sqrt{[1-yy]}$. Or je vais prouver qu'en effet dP a cette valeur dans l'hypothese présente ; pour cela il suffit de démontrer (*art.* 73) que l'extrémité p de l'Axe de la terre décrit à chaque instant une portion de grand cercle.

LEMME VII.

118. *Imaginons que* PRpS, RQSC (Fig. 56) *soient deux grands cercles perpendiculaires l'un à l'autre dans une Sphere dont le centre* C *est arrêté fixement, & qui est libre dans tous ses autres points, ou si l'on veut, dont le centre* C *se meut en ligne droite avec une vitesse & une direction quelconques. Supposons, de plus, que cette Sphere tourne autour de l'Axe* CQ *perpendiculaire au plan* PRpS, *ensorte que la ligne* Pp *perpendiculaire à la commune section* RCS, *décrive ou tende à décrire le cercle* pRPS; *je dis que si on imprime en même tems à la Sphere un autre mouvement qui tende à la faire tourner autour de l'Axe* Cq *placé dans le plan* RQS, *le mouvement composé qui résultera de ces deux-là, sera un mouvement de rotation autour d'un Axe* Cq' *placé dans le plan* RQS.

Car 1°. (*art.* 92) la force ou le mouvement imprimé à la Sphere pour tourner autour de CQ, peut se réduire à une seule force qui agisse à l'extrémité de la ligne Cp perpendiculaire à la commune section RCS, suivant une ligne pV parallele à cette commune section ; 2°. (par le même *article*) la force imprimée à la Sphere pour tourner autour de Cq, peut se réduire de même à une seule force

force agiſſant ſuivant pu parallele à la ligne Co qui eſt perpendiculaire à Cq. Donc ſi on cherche la direction pu' de la force unique, réſultante des deux forces qui agiſſent ſuivant pV & pu, il eſt évident que le mouvement de la Sphere ſera le même que s'il venoit de la ſeule force ſuivant pu'. Or tirant Co' parallele à pu' & Cq' perpendiculaire à Co', on ſçait (*art.* 90) que la force ſuivant pu' doit produire un mouvement de rotation autour de l'Axe Cq'. Donc &c. *Ce Q. F. D.*

COROLL. I.

119. De-là il s'enſuit, que ſi la force qui anime la Sphere à tourner autour du centre C, change à chaque inſtant de direction, mais qu'elle tende toujours à faire tourner la Sphere autour de quelque Axe placé dans le plan RQS, les points, P, p, tendront continuellement à ſe mouvoir dans un grand cercle, & s'y mouvroient en effet ſi la force qui les anime venoit à ceſſer.

COROLL. II.

120. Puiſque la force du Soleil agit toujours dans le plan d'un Méridien (*art.* 1), il s'enſuit qu'elle tend (*art.* 90) à faire tourner la terre à chaque inſtant autour d'un Axe variable Cq toujours placé dans le plan de l'Equateur ; par conſéquent les extrémités P, p, de l'Axe de la terre tendront continuellement à décrire un grand

cercle. Nous regardons ici le centre *C* comme fixe, parce que les mouvemens que la force du Soleil peut imprimer en ligne droite au centre *C*, n'altérent point le mouvement de rotation.

Coroll. III.

121. Donc puisque la force de la Lune agit toujours, ou peut être supposée agir (*art.* 116) à l'extrémité de l'Axe *p* sur laquelle agit le Soleil, il s'ensuit que l'extrémité *p* de l'Axe de la terre décrit toujours, ou tend à décrire un Arc de grand cercle.

Probleme XI.

122. *Déterminer la précession des Equinoxes, ou en général le mouvement de l'Axe de la terre, en n'ayant point égard à la rotation diurne de la terre autour de son Axe.*

Afin de rendre la solution plus simple, nous n'aurons d'abord égard qu'à l'action du Soleil.

Pour déterminer le mouvement de l'Axe de la terre, nous chercherons la courbe que décrit autour du centre *C* (Fig. 57) le point *T* qui est la projection du Pôle *p* sur le plan de l'Ecliptique; & nous supposerons que la variable $CT = y$, & que cette ligne *CT* décrive un petit angle ds durant le tems dt que la terre décrit l'arc udz avec la vitesse g.

Nous venons de remarquer (*article* 121), que dans

l'hypothese présente le Pôle p tend toujours à se mouvoir dans un grand cercle, ensorte que si la force qui anime ce point venoit tout-à-coup à cesser, il décriroit en effet un grand cercle d'un mouvement uniforme, & que le point T qui en est la projection décriroit une Ellipse dont C seroit le centre, de maniére que les aires seroient proportionnelles aux tems. Donc le point T tend continuellement à décrire une Ellipse dont le point C est le centre, & la force vers C qui résulte de cette tendance est évidemment égale à la force centrifuge du Pôle de la terre, multipliée par le rapport de CT au rayon. Or la force centrifuge du Pôle est égale au quarré de sa vitesse divisée par le rayon 1, & le quarré de sa vitesse est = au quarré de l'Arc qu'il parcourt, divisé par dt^2, c'est-à-dire (*art.* 108) $\frac{yydt^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2(1-yy)}$; donc si on met pour dt^2 sa valeur $\frac{u^2dz^2}{gg}$ ou $\frac{udz^2}{F}$, en appellant F la force $\frac{S}{u^2}$, & qu'on multiplie la quantité précedente par y, on aura pour la force du point T vers C, résultante de la force d'inertie, l'expression $y\,(yydt^2 + \frac{dy^2}{1-yy}) \times \frac{F}{udz^2}$, & cette force étant jointe à la force suivant TC qui vient de l'action du Soleil, on aura $y\,(\frac{yydt^2 \cdot F}{udz^2} + \frac{Fdy^2}{udz^2(1-yy)}) + \frac{2\pi y.(1-yy)}{4D.K}$ Cosin. v^2 pour la force

qui pousse le point T vers C, (*art.* 109 & 115) & que j'appelle R ; & la force suivant Tt (Fig. 50) sera $= \frac{ny . \text{Sin. } 2v}{4D . K}$. Or s'il n'y avoit aucune force ni suivant TC, ni perpendiculairement à TC, le point T décriroit une ligne droite, ensorte que l'on auroit $ddy = yd\epsilon^2$, & $dd\epsilon = -\frac{2d\epsilon dy}{y}$; donc en ayant égard aux deux forces ci-dessus, on trouvera . . . . $ddy = yd\epsilon^2 - Rdt^2 = 0$, $ydd\epsilon = -2d\epsilon dy + \frac{nydt^2 \text{ Sin. } 2v}{4D . K}$: donc mettant pour dt^2 sa valeur $\frac{n^3 dz^2}{S}$, & pour $2n$ sa valeur $\frac{3S}{n^3} \times A \times 4D$ (*art.* 110), on aura

(E') . . . . $ddy = yd\epsilon^2 - y(yyd\epsilon^2 + \frac{dy^2}{1-yy}) - \frac{3A \text{ Cos. } v^2}{K}(1-yy)ydz^2$ . . . .

(F') . . . . $ydd\epsilon + 2d\epsilon dy = \frac{3Adz^2}{2K} y \text{ Sin. } 2v$.

COROLL. I.

123. Soit π l'angle que fait à chaque instant l'Axe de la terre avec l'Ecliptique, on aura $y = \text{Cosin. } \pi$, & $1 - yy = \text{Sin. } \pi^2$. De plus, $ydd\epsilon + 2d\epsilon dy = \frac{d(yyd\epsilon)}{y}$; donc les deux équations précedentes deviendront celles-ci . . . .

(G') . . . . $dd(\text{Cos. } \pi) = d\epsilon^2 [\text{Cos } \pi . \text{Sin. } \pi^2] - d\pi^2 \text{ Cos. } \pi - \frac{3Adz^2 (\text{Cos. } v^2)}{K} \times \text{Cos. } \pi \times \text{Sin. } \pi^2$.

$(H') \ldots \, d(d\epsilon \text{ Cof. } \pi^2) = \frac{3A dz^2 \cdot \text{Cof. } \pi^2 \cdot \text{Sin. } 2V}{2K}$

COROLL. II.

124. Si on veut maintenant avoir égard à l'action de la Lune, on trouvera que la force totale qui agit fur le point T perpendiculairement à CT, eft (*art.* 113)

$$\frac{3A \text{ Cof. } \pi \times \text{Sin. } 2v}{2K} + \frac{3A(1+\zeta) \text{ Cof. } \pi \cdot \text{Sin. } 2v'}{2K}$$

$- \frac{3A(1+\zeta) m'\zeta \text{ Sin. } v' \cdot \text{Sin. } \pi}{K}$; & que la force qui agit fur

le point T fuivant TC, eft $\frac{3A}{K} \times \text{Cof. } v^2 \times \text{Sin. } \pi^2 \cdot \text{Cof. } \pi$

$$+ \frac{3A(1+\zeta) \text{ Cof. } v'^2 \text{ Sin. } \pi^2 \text{ Cof. } \pi}{K}$$

$$- \frac{3A(1+\zeta) m'\zeta \text{ Cof. } v' \times \text{Sin. } \pi (1 - 2 \text{ Cof. } \pi^2)}{K}.$$

Donc fi on met au lieu de $dd(\text{Cof. } \pi) + d\pi^2 \text{ Cof. } \pi$ fa valeur $- dd\pi \times \text{Sin. } \pi$ dans les équations précédentes, & qu'on ait égard à la force de la Lune, on aura deux équations différentielles qui feront précifément les mêmes que l'on a trouvées ci-deffus (*art.* 117) par la méthode générale.

COROLL. III.

125. Pour peu qu'on compare ces deux équations avec celles qu'on a trouvées (*art.* 45) dans l'hypothefe du mouvement diurne de la terre autour de fon Axe, on verra combien elles en font différentes. On remar-

quera, par exemple, que l'équation Y (*art.* 45) qui sert à trouver la nutation de l'Axe, lorsque k est $= - 365\frac{1}{4}$ sert au contraire à trouver la valeur de $d\epsilon$ ou la précession des Équinoxes lorsque $k = 0$, parce qu'alors on ne peut pas négliger le terme $d(d\epsilon \text{ Cof. } \pi^2)$ par rapport au terme $d(kdz \text{ Sin. } \pi)$ qui est lui-même nul; par la même raison, l'équation Z (*art.* 45) servira à déterminer la nutation de l'Axe: or comme la quantité $d\epsilon$ par la premiere équation se trouve de l'ordre de $\frac{A}{K}$, la quantité $d\epsilon^2$ sera de l'ordre de $\frac{A^2}{K^2}$; par conséquent on pourra négliger dans l'équation Z le terme où $d\epsilon^2$ se rencontre. D'où il sera facile de voir que la valeur de π renfermera un terme constant de cette forme $\frac{3Azz}{4K}$, à cause que Cof. v^2 renferme un terme tout constant $\frac{1}{2}$, & qu'ainsi l'angle de l'Axe de la terre avec l'Ecliptique seroit sujet à des variations considérables: ce qui ne doit pas paroître surprenant, puisque le Pôle de la terre (*art.* 121) tend toujours à décrire un grand cercle dans cette hypothese, & que par conséquent il fait un effort continuel pour se mouvoir dans un Méridien, & décrit en effet à chaque instant un petit Arc de quelque Méridien, & non pas un Arc de cercle parallele à l'Ecliptique.

COROLL. IV.

126. De-là on voit que la rotation de la terre autour de ſon Axe, influe beaucoup ſur le mouvement que l'Axe de la terre doit avoir en vertu de l'action du Soleil & de la Lune ; cependant quelques Lecteurs auront peut-être de la peine à concevoir comment ce mouvement de rotation peut altérer ſi fort celui que l'Axe de la terre auroit, ſi la rotation étoit nulle. Pour en faire bien ſentir la raiſon, je ſuppoſe un globe parfaitement en repos $QLql$ (Figure 58), dont un des points Q ſoit tiré perpendiculairement au plan $QLql$ par une force quelconque que je nomme Q; il eſt certain (*art.* 90) qu'en vertu de cette force, le point Q décriroit un grand cercle autour de l'Axe Ll. Suppoſons préſentement, que dans l'inſtant que cette force agit ſur le point Q, le globe reçoive un mouvement de rotation autour de l'Axe Qq, il ſuit de l'*article* 90, qu'on pourra ſubſtituer à ce mouvement une force placée en L, & agiſſant perpendiculairement au plan $QLql$. Or comme les forces Q, L ſont paralleles l'une à l'autre, on pourra les réduire à une ſeule force placée au point H de la ligne LQ, tel, que $LH \times L = Q \times HQ$. Donc joignant CH, & menant CF perpendiculaire à CH; la ligne CF ſera l'Axe de rotation du globe : donc le point Q décrira autour de cet Axe un cercle qui aura pour rayon le Sinus QO, & il eſt évident que ce cercle ſera fort petit, ſi Q eſt fort petit par rapport à L;

au lieu que quand $L = o$, le point Q doit décrire un grand cercle, quelque petite que soit la force Q. Donc &c.

REMARQUE.

127. On peut ajouter, pour la confirmation de ce que nous venons de remarquer dans l'*art.* précedent, qu'en quelque endroit des lignes CL, CQ, que les forces L, Q, soient placées, pourvû qu'elles conservent le même moment par rapport au point C, la force qui en résultera sera toujours placée dans la même ligne CH, & aura le même moment par rapport au point C. Pour le prouver, soient imaginées deux puissances l, q, appliquées en l, q, & telles que $l \times Cl = q \times Cq$: ayant joint lq qui coupe en h la ligne CH, soient abbaissées des points H, h, les perpendiculaires HM, hN, on aura $HM : hN :: CM : CN$, & $HM = \frac{MQ \times LC}{CQ}$: donc $CN = \frac{hN \times CM \times CQ}{MQ \times LC}$; or $hN = \frac{Cl \times Nq}{Cq}$, & $CM : MQ :: Q : L$; donc $CN : Nq :: \frac{Cl \times CQ \times Q}{L} : CL \times Cq$, c'est-à-dire (à cause de $CQ \times Q = Cq \times q$, & de $CL \times L = Cl \times l$) $:: q : l$; donc le point h est le centre de gravité des forces q, l. De plus, à cause de $HM = \frac{MQ \times LC}{CQ}$ & de $\frac{MQ}{CQ} = \frac{L}{Q+L}$, on aura $HM = \frac{L \times LC}{Q+L}$; de même à cause de $hN = \frac{Cl \times Nq}{Cq}$ & de $\frac{Nq}{Cq} = \frac{l}{q+l}$

$\frac{l}{q+l}$; on aura $hN = \frac{Cl \times l}{q+l}$. Donc puiſque $Cl \times l = CL \times L$, on aura $HM : hN :: q + l : Q + L$. Donc puiſque la force en H eſt $Q + L$, & la force en h, $q + l$, il s'enſuit que les momens de ces forces par rapport à C ſont égaux entr'eux.

CHAPITRE XIII.

De la préceſſion des Equinoxes dans quelques hypotheſes particulieres.

128. LEs Problêmes dont nous allons donner ici la ſolution, feront fort utiles pour les remarques que nous ferons dans le Chapitre ſuivant ſur la Théorie de la préceſſion des Equinoxes, donnée par M. *Newton.*

PROBLÊME XII.

129. *Trouver la préceſſion moyenne des Equinoxes dans l'hypotheſe, que la terre ſoit réduite à un ſeul anneau placé dans le plan de l'Equateur, & que le Soleil ſeul agiſſe ſur cet anneau.*

Soit α l'épaiſſeur de l'anneau, ou la différence des rayons qui le forment, on aura pour le moment de la force du Soleil la quantité $\frac{3S \cdot \alpha \cdot 4D}{2n^3} \times$ Sin. V. Coſ. V,

en faisant $b = a = 1$ dans l'*art.* 9 ; & par conséquent $\Psi . L = \frac{3S\alpha}{2 . u^3} \times 4D . y$ Cos. v, & $\Psi . L$ Cos. $v \sqrt{[1 - yy]}$ $= \frac{3S\alpha}{2 . u^3} . 4D . y \sqrt{[1 - yy]}$. Cos. $v^2 = \frac{3S\alpha}{2 . u^3} \times 4D \times$ Sin. π . Cos. π . Cos. v^2 ; de plus, la terre étant réduite à cet anneau, on aura $a - b = 0$; donc la quantité M (*art.* 44) sera $= 0$, & la quantité $K \times 2D$, sera $= \frac{\alpha . 4D}{2} = \alpha . 2D$.

Donc l'équation X de l'*article* 44 se changera en celle-ci (si on néglige les termes $dd\pi$ & $- d\epsilon^2$ Sin. $\pi \times$ Cos. π, aussi-bien que ceux où se trouve $1 + \epsilon$, & qui viennent de la force de la Lune) $\frac{3\alpha . 4D . dz}{2k . \alpha} \times$ Sin. $\pi \times$ Cos. $v^2 + \frac{2\alpha \times 2D d\epsilon = 0}{\alpha}$ ou $d\epsilon = \frac{-3dz}{4k}$, en supposant Sin. $\pi = 1$, en mettant pour Cos. v^2 sa valeur $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ Cos. $2v$, & en négligeant la quantité $\frac{1}{2}$ Cos. $2v$ qui ne donne que l'équation de la précession, & non sa valeur moyenne. Donc la précession annuelle des Equinoxes dans cette hypothese seroit $= \frac{3}{4 . 365\frac{1}{4}} \times 360°$.

C O R O L L. I.

130. Donc il est visible que si la terre étoit réduite à un seul anneau circulaire placé dans le plan de l'E-

quateur, & que l'angle de l'Equateur avec l'Écliptique fût fort petit, la précession annuelle & moyenne des Equinoxes feroit en raifon inverfe de $-k$, c'eft-à-dire en raifon du tems de la rotation de l'anneau autour d'un Axe qui lui feroit perpendiculaire. Car $-kdz$ étant proportionnelle à la viteffe angulaire de cette rotation d'Occident en Orient, il s'enfuit que le tems de la rotation eft proportionnel à $\frac{1}{-k}$.

COROLL. II.

131. On peut trouver par un calcul, qu'il feroit trop long d'inférer ici, & que je donnerai ailleurs, que le mouvement annuel des nœuds de la Lune eft $\frac{3}{4} \times 360 \times \varrho$, ϱ étant le rapport du tems périodique de la Lune, au tems périodique de la Terre. Donc le mouvement des nœuds de la Lune eft à celui des nœuds de l'anneau, en raifon des *Périodes* de la Lune & de l'anneau.

COROLL. III.

132. Si on regarde la terre comme un Sphéroide Elliptique homogene, dont l'Equateur foit à peu près dans le plan de l'Ecliptique, enforte que Sin. π puiffe être fuppofé $= 1$, on aura (*art.* 44 & 52) pour l'équation de la préceffion annuelle & moyenne des Equinoxes $d\epsilon = \frac{3\alpha dz}{2 \cdot 365\frac{1}{4}}$. Donc la préceffion dans cette hy-

pothefe fera à la préceffion dans l'hypothefe de l'anneau circulaire, comme 2α eft à 1.

REMARQUE.

133. Il faut bien prendre garde que l'Equateur ne doit pas être fuppofé à la rigueur dans le plan de l'Ecliptique. Car Cof. π feroit $= 0$; donc tous les termes de l'équation Z (*art.* 45) s'évanouiroient, & l'équation Y donneroit Sin. $\pi =$ à une conftante; ainfi l'Axe de la terre n'auroit aucun mouvement: & en effet, il eft vifible que fi l'Axe de la terre étoit perpendiculaire au plan de l'Ecliptique, l'action du Soleil fur toutes les parties du globe, ou fur celles de l'anneau (la terre étant réduite à un anneau placé dans l'Equateur) fe réduiroit à une force qui pafferoit par le centre du globe, & qu'ainfi cette action ne produiroit aucun mouvement dans l'Axe de la terre, ni par conféquent aucune préceffion. D'ailleurs, l'Equateur étant alors dans le plan de l'Ecliptique, il ne pourroit y avoir de préceffion, par la feule raifon que ces deux plans n'auroient point alors de commune fection.

Mais, dira-t-on, comment fe peut-il que fi on incline tant foit peu l'Axe de la terre, la préceffion qui étoit auparavant nulle, devienne très-fenfible, & même la plus grande qu'il eft poffible; car on voit par les formules précedentes qu'elle eft proportionnelle à Sin. π, toutes chofes d'ailleurs égales? je réponds, que l'extrémité de

l'Axe de la terre reçoit alors à la vérité un mouvement très-petit, mais que l'angle décrit par la projection de l'Axe à chaque instant est fort considérable, par rapport au mouvement de l'Axe. En effet, supposons, par exemple, que le Pôle de la terre décrive un petit Arc parallele à l'Ecliptique, que je nomme β, il est certain que $\frac{\beta}{\text{Cos}.\ \pi}$ sera le mouvement angulaire de la projection de l'Axe, tandis que β sera celui de l'Axe. Or Cos. π (*hyp.*) est fort petit : donc le mouvement angulaire de la projection de l'Axe, qui (comme on l'a déja remarqué) (*art.* 46) est toujours égal à la précession des Equinoxes, est infiniment plus grand que le mouvement de l'Axe même. Ainsi il n'est pas surprenant, que pour peu qu'on incline l'Axe de la terre, la précession des Equinoxes devienne fort sensible.

PROBLEME XIII.

134. *Trouver la précession moyenne des Equinoxes dans l'hypothese que le Soleil seul agisse, & que la terre soit un Sphéroide homogene, réduit à la seule croute ou double Ménisque* PapAPepE (Fig. 60), *la figure intérieure* Pape *étant retranchée.*

Il est clair que dans cette hypothese, on a $A \times 4D = \frac{4\alpha}{15} \times 4D$ (*art.* 44), $M \times 2D = \frac{4}{15} \times 2D \times 2\alpha$, $K \times 2D = \frac{4}{15} \times 2D \times 4\alpha$ (*art.* 43). Donc l'équation X de l'*art.* 44 se

changera en celle-ci, $\frac{3\alpha \,.\, 2dz \text{ Cof. } v^2 \text{ Sin. } \pi}{(2\alpha + 4\alpha)k} + \frac{8d\epsilon}{6} = 0$. Donc faifant les mêmes fuppofitions que dans l'*art.* 129, c'eft-à-dire Sin. $\pi = 1$, on aura $\frac{3dz}{-k(2+4)} = \frac{4d\epsilon}{3}$; ou $d\epsilon = \frac{-3dz}{8k}$.

COROLL. I.

135. Donc fi on nomme R la préceffion des Equinoxes dans l'hypothefe de l'anneau circulaire, il faudra multiplier cette quantité R par $\frac{1}{2}$, pour avoir la préceffion dans l'hypothefe que la terre foit réduite au double Ménifque dont il s'agit ici. Car il réfulte de l'*art.* précedent, que la préceffion annuelle dans l'hypothefe du double Ménifque, eft $\frac{360° \times 3}{8 \times 365\frac{1}{4}}$: or (*art.* 129) $R = \frac{3 \times 360°}{4 \times 365\frac{1}{4}}$. Donc &c.

COROLL. II.

136. Donc puifque la préceffion annuelle des Equinoxes dans l'hypothefe du double Ménifque eft $R \times \frac{1}{2}$, & que dans l'hypothefe du globe ou Sphéroide applati elle eft $R \times 2\alpha$; il s'enfuit qu'il faudra multiplier par 4α la préceffion dans l'hypothefe du double Ménifque, pour avoir la préceffion dans l'hypothefe du globe, ou,

ce qui revient à peu près au même, du Sphéroide applati homogene.

CHAPITRE XIV.

Remarques ſur la Théorie de la préceſſion des Equinoxes, donnée par M. Newton.

137. C'Est dans la Prop. 39 du 3ᵉ Livre des Principes Mathématiques, que M. *Newton* a renfermé cette Théorie. Il réſulte de ſes calculs, que ſi l'Axe de la terre étoit à très-peu près perpendiculaire au plan de l'Ecliptique, & que la terre fût un Sphéroide Elliptique homogene, enſorte que α fut $= \frac{1}{230}$, la préceſſion annuelle des Equinoxes ſeroit de $9'' \, 56'''$, c'eſt-à-dire d'environ $10''$, en la ſuppoſant produite par l'action ſeule du Soleil. Or il réſulte de la formule $\frac{3\alpha \,.\, 360^{\circ}}{2 \,.\, 365\frac{1}{4}}$ trouvée (*art.* 132) qu'en ſuppoſant avec M. *Newton* $\alpha = \frac{1}{230}$, la préceſſion annuelle des Equinoxes produite par l'action ſeule du Soleil, ſeroit égale à environ $\frac{3 \,.\, 60 \,.\, 60''}{2 \,.\, 230}$, c'eſt-à-dire à plus de $23''$, ce qui eſt plus que le double de la quantité trouvée par M. *Newton*. Voilà donc une différence qui peut faire ſoupçonner

qu'il y a quelque méprife dans la maniére dont M. *Newton* a réfolu ce Problême. Pour m'en affurer, j'ai étudié avec toute l'attention qui m'a été poffible, la Prop. 39 de M. *Newton*, & les propofitions précedentes d'où elle dépend, & il m'a paru que quelques-unes de ces propofitions n'étoient point exactes. C'eft ce que je vais tâcher de montrer avec tout le détail, qui eft dû à l'importance de la matiére, & à l'autorité du grand homme dont je crois devoir ici m'écarter; fi on me fait voir que je me fuis trompé, je m'en rapprocherai avec d'autant plus de plaifir, que tout ce que je vais dire ne porte aucune atteinte au fyftême de la Gravitation.

138. Pour faire ce détail avec plus d'ordre, je fuivrai toutes les propofitions de M. *Newton*, en démontrant d'après mes formules celles qui m'ont femblé fufceptibles de démonftration, & en faifant remarquer ce qui ne me paroît pas exact dans les autres.

Soit, dit M. *Newton*, le Sphéroide *APEp* (Fig. 60) d'une denfité uniforme, qui repréfente la terre, *Pape*, la Sphere infcrite à la terre, & paffant par les Pôles *P*, *p*, *QR* un plan perpendiculaire à la ligne menée du centre *C* au Soleil; & fuppofons que toutes les parties de la terre extérieure *PapAPepE* faffent effort pour s'éloigner du plan *QR*, de maniére que l'effort de chaque particule foit comme fa diftance à ce plan: je dis 1°. que la force de toutes les particules placées dans le cercle *AE* de l'Equateur, pour faire tourner la terre autour de fon centre, fera la moitié de la force

force d'un égal nombre de particules placées au point A de l'Equateur qui eſt le plus éloigné du plan QR, pour faire tourner la terre autour de ſon centre; 2°. que ce mouvement circulaire ſe fera autour de la commune ſection de l'Equateur & du plan QR.

Pour démontrer cette propoſition, nous remarquerons 1°. qu'en conſervant les noms de l'*art.* 7, la force au point A de l'Equateur, en ſuppoſant toute la maſſe $2\pi\alpha$ des particules de l'Equateur raſſemblée en A ſeroit $= -\frac{3S}{n^3} \times 2\pi\alpha \times - kq$, en ſuppoſant $a = 1$ pour abréger; pour avoir cette expreſſion, il ne faut que faire $2fx - xx = 0$, & $q' = 0$ dans l'*article* 8. Or en faiſant dans l'*art.* 9 $b = a$, on trouvera la force des particules renfermées dans le plan de l'Equateur $= \frac{-3S\pi\alpha . kq}{n^3} \times - 1$. Il eſt viſible que cette ſeconde force eſt la moitié de la précedente.

2°. Il réſulte des *art.* 1 & 90, que la force que le Soleil exerce ſur le double Méniſque $PapAPepE$, tend à faire tourner la terre autour d'un Axe perpendiculaire à la fois à l'Axe Pp de la terre & à la ligne menée du centre C au Soleil. D'où il s'enſuit, en premier lieu, que cette ligne ſera dans le plan de l'Equateur, puiſque l'Equateur renferme toutes les lignes perpendiculaires à l'Axe Pp, que l'on peut mener par le centre C; en ſecond lieu, que cette ligne ſera par la même raiſon dans le plan perpendiculaire à la ligne

menée par le centre C au Soleil ; donc elle sera la commune section de ces deux plans.

139. La seconde proposition de M. *Newton*, est que la force que toutes les particules $PapAPepE$ placées hors du globe, exercent pour le faire tourner, est à la force d'un nombre égal de parties placées dans le cercle AE de l'Equateur, en forme d'anneau, comme 2 est à 5.

La force de toutes les parties $PapAPepE$ (*art.* 10) est $=\frac{6Sqk\pi\alpha}{u^3}\times\frac{-4}{3\cdot5}$, & si on suppose que $2\pi\alpha b'$ représente toutes les parties ramassées dans le plan de l'Equateur, on aura pour la force de toutes ces parties $=\frac{3S\pi\alpha kqb'}{u^3}\times-1$. Or la masse ou la somme de toutes les particules est à très-peu près $=\frac{4\pi\cdot2\alpha}{3}$: car $\frac{4\pi}{3}$ est la masse de la Sphere, & cette masse est à celle de la partie extérieure $PapAPepE$, comme 1 à 2α ; donc $b'=\frac{4}{3}$. Mettant cette valeur de b' dans l'expression précedente, on aura $=\frac{6S\pi\alpha qk}{u^3}\times\frac{-2}{3}$. Or cette force est à la force $=\frac{6S\pi\alpha qk}{u^3}\times\frac{-4}{3\times5}$, comme 5 à 2. Donc &c.

140. Par la troisiéme proposition de M. *Newton*, le mouvement de la terre autour de son centre, est au mouvement de l'anneau AE autour d'un de ses diamé-

tres, en raiſon compoſée de la maſſe de la terre à la maſſe de l'anneau, & de trois fois le quarré d'un quart de circonférence à deux fois le quarré du diamétre.

Pour démontrer cette propoſition, on remarquera que le mouvement de la Sphere $= \int db \int 2\pi b\, dx \times \surd[2bx - xx] = \frac{\pi^2}{4}$, que le mouvement de l'anneau autour d'un de ſes diamétres, eſt $\int 2\alpha\alpha b' dx = 4\alpha b'$, que la matiére de la Sphere eſt à celle de l'anneau, comme $\frac{4}{3}$ à $2\alpha b'$, & qu'enfin le rapport de 3 fois le quarré du quart de la circonférence à 2 fois le quarré du diamétre, eſt $\frac{3\pi^2}{4} : 8$, or $\frac{\pi^2}{4} : 4\alpha b' :: \frac{4}{3} \times \frac{3\pi^2}{4} : 2\alpha b' \times 8$. Donc &c.

141. M. *Newton* fait enſuite cette hypotheſe, que ſi la terre étoit réduite à l'anneau *AE*, le mouvement des points Equinoctiaux ſeroit le même, ſoit que cet anneau fût ſolide ou fluide.

C'eſt ici où il me ſemble que la Théorie de M. *Newton* commence à n'être plus ſi bien démontrée. Il doit en effet y avoir de la différence entre le mouvement d'un amas de particules ſolides, dont l'union doit altérer néceſſairement leurs mouvemens réciproques, & une ſuite de particules fluides qui ne tiennent point les unes aux autres. Il ne me paroît pas vrai que le mouvement des nœuds de pluſieurs Lunes, ſoit le même que celui d'une ſeule Lune. Car ce mouvement, ainſi

que la variation de l'inclinaison, est différent selon la position de chaque Lune, desorte que si les Lunes se trouvent toutes pendant un instant dans le même plan, elles cesseront bientôt après d'y être, & que les nœuds de chacune se mouvront séparément; au lieu que tous les points d'un anneau solide sont toujours nécessairement dans le même plan. Il est vrai que le systême des différentes Lunes dont il s'agit, abstraction faite de leur action mutuelle, formera une courbe à double courbure qui ne sera pas bien différente d'un plan.

Il est vrai aussi (*art.* 130) que le mouvement moyen des nœuds de toutes ces Lunes, sera à très-peu près le même; & il est vrai encore, comme nous le verrons tout à l'heure, que le mouvement moyen des nœuds de l'anneau, sera le même que celui d'une Lune qui tourneroit très-proche de la surface de la terre dans le même plan que l'anneau, & avec la même vitesse. Mais il résulte toujours de la remarque précedente, que l'hypothese de M. *Newton* ne paroît point exacte: on va voir pourtant que ce n'est pas cette hypothese qui produit l'erreur de sa solution, s'il y en a, comme j'ai lieu de le croire.

142. M. *Newton* ajoute, que si la Lune tournoit en un jour autour de la terre, le mouvement annuel de ses nœuds seroit au mouvement réel de ces mêmes nœuds, sçavoir $20^{\circ}\ 11'$, comme un jour seroit au tems de la révolution périodique réelle de la Lune, c'est-à-dire comme $23^{h}\ 56'$ à $27^{j}\ 7^{h}$. Cette proposition est

très-vraie (*article* 131), & il ſuit de plus de ce même *art.* 131, qu'au lieu de cette Lune qui ſe meut autour de la terre à la diſtance du rayon, on peut ſubſtituer un anneau ſolide, comme le fait M. *Newton*; car les nœuds de cet anneau ſolide auront par l'*article* cité, le même mouvement que les nœuds de cette Lune, qu'on ſubſtitue ici à la Lune réelle.

143. M. *Newton* ſuppoſe que la raiſon de 230 à 229, ſoit celle des deux Axes de la terre; & il remarque que le mouvement de l'anneau AE autour d'un de ſes diamétres ſeroit au mouvement de la terre, comme $2a \times 8$, eſt à $\frac{3\pi^2}{4}$, ou comme $2ab' \times 8$ à π^2, c'eſt-à-dire comme 4590 à 489813; de-là il conclut que ſi l'anneau communiquoit au globe ſon mouvement, le mouvement qui reſteroit dans l'anneau ſeroit au mouvement qu'il avoit auparavant, dans le même rapport que ces nombres. Or il me paroît que M. *Newton* ſe trompe en cela: car de ce que le mouvement de l'anneau ſeroit au mouvement de la terre, comme $\frac{3\pi^2}{4}$ à $16a$, s'ils faiſoient tous deux leurs révolutions en même tems, il ne paroît pas s'enſuivre que le mouvement qui reſte à l'anneau après qu'il en a communiqué une partie à la terre, doive être dans cette même raiſon avec le mouvement primitif de l'anneau. Pour le prouver, ſoit M la viteſſe d'un point de l'anneau placé à la diſtance de l'Axe $= a = 1$, X la viteſſe reſtante à l'anneau & à la Sphere, on aura

le moment de l'anneau animé par la vitesse $M - X =$ au moment de la Sphere animée de la vitesse X. Donc $(M - X) \int 2\alpha dx \sqrt{[2ax - xx]}$ ou $(M - X) \times \pi \alpha b' = X \int db \int 2\pi b dx \ (2bx - xx) = 2\pi X \times (\frac{4}{5} - \frac{8}{3 \cdot 5})$; donc X à très-peu près $= \frac{15 M \alpha b'}{8}$: or par la proposition de M. *Newton*, on auroit $X = \frac{M \cdot 16\alpha \cdot b'}{\pi^2}$. Donc ces deux valeurs de X sont entr'elles, comme $\frac{15}{8} : \frac{16}{\pi^2}$; c'est-à-dire à cause de $\pi^2 =$ à peu près 10, comme 75 est à 64 à peu près; ce qui fait une différence de plus de $\frac{1}{6}$.

En mettant pour b' sa valeur $\frac{4}{3}$ dans l'équation $X = \frac{15 M \alpha b'}{8}$, on auroit $X = \frac{1}{4} \times \frac{360}{365\frac{1}{4}} \times \frac{15}{8} \times \alpha \times \frac{4}{3} = \frac{3 \cdot 360}{4 \cdot 365\frac{1}{4}} \times \alpha \times \frac{5}{2}$.

144. Enfin M. *Newton* multiplie par $\frac{2}{5}$ la quantité trouvée de la précession des Equinoxes, par la raison que la matiére du double Ménisque n'est pas resserrée dans le plan de l'Equateur, ce qui réduit (*article* 139) la force de rotation à $\frac{2}{5}$ de ce qu'elle seroit sans cela; & il trouve par ce moyen que la précession des Equinoxes, en n'ayant égard qu'à l'action du Soleil, est de

près de 10″. Il me ſemble qu'il y a encore ici une mépriſe : car quand même on prendroit pour la préceſſion des Equinoxes non corrigée, la quantité $\frac{3 \times 360}{4} \times \alpha \times \frac{5}{2}$ que nous venons de trouver ci-deſſus, cette quantité multipliée par $\frac{2}{5}$ ne donneroit pour la préceſſion réelle des Equinoxes, que $\frac{3 \cdot 360 \cdot \alpha}{4 \cdot 365\frac{1}{4}}$ qui ſeroit (*art.* 137) la moitié ſeulement de ce qu'elle doit être. Car nous avons fait voir qu'elle doit être $\frac{3 \cdot 360 \cdot \alpha}{2 \cdot 365\frac{1}{4}}$.

145. J'ai donné dans l'Introduction qui eſt à la tête de cet Ouvrage, une des raiſons pour leſquelles cette ſuppoſition de M. *Newton* paroît fautive ; j'y ai fait voir par l'exemple d'un lévier, que les mouvemens produits par deux forces différentes, mais différemment appliquées à deux corps de maſſes égales & de différente figure, ne ſont pas entr'eux comme ces forces ; mais à cette premiere conſidération, qui étoit la ſeule que je pouvois rendre ſenſible dans l'Introduction déja citée, il s'en joint une autre qui n'eſt pas moins importante ; c'eſt que l'effet de ces forces eſt altéré par le mouvement de rotation de la terre autour de ſon Axe, avec lequel ſe combine le mouvement que ſes forces tendent à produire. Car ſi on n'a point d'égard au mouvement de rotation, on trouvera comme dans l'*article* précedent $\frac{3 \cdot 360 \cdot \alpha}{4 \cdot 365\frac{1}{4}}$ pour la préceſſion des Equinoxes,

puisque la force qui anime l'anneau est à celle qui anime le double Ménisque, comme 5 à 2, & que les produits des particules à mouvoir, par les quarrés de leurs distances à l'Axe de rotation, sont (*art.* 143) $\frac{4}{3}\pi\alpha$ d'une part, & $\frac{4}{15}\times 2\pi$ de l'autre; d'où il s'ensuit que les mouvemens produits par ces forces seront entr'eux, comme $\frac{5}{\frac{4}{3}\pi\alpha}$ est à $\frac{2}{\frac{4}{15}\times 2\pi}$, c'est-à-dire comme 1 est à α, & la précession des Equinoxes $\frac{3\cdot 360\cdot\alpha}{4\cdot 365\frac{1}{4}}$ se trouvera d'environ 11 à 12″ en vertu de l'action seule du Soleil. Suivant M. *Newton*, elle est d'environ 10″, & nous avons fait voir (*art.* 137) qu'elle est à peu près de 23 à 24″, si on a égard au mouvement de rotation. Ainsi le résultat trouvé par M. *Newton* ne paroît point exact, sur-tout dans la supposition que l'on ait égard au mouvement de rotation.

146. On voit par ce détail combien il est nécessaire de résoudre par une méthode très-rigoureuse un Problême aussi compliqué que celui-ci. D'ailleurs, en accordant même à M. *Newton* tous les principes Méchaniques dont il se sert, on doit remarquer qu'il emploie deux principes *de fait* qu'on peut lui contester; sçavoir 1°. que la différence des Axes de la terre soit $\frac{1}{230}$, & que la terre soit un Sphéroide homogene; ces deux suppositions, qui

qui ne font que la même, semblent contraires aux observations faites par l'Acad. R. des Sciences, observations que M. *Bradley* paroît avoir adoptées dans la lettre dont j'ai parlé (*art.* 50), & suivant lesquelles l'applatissement de la terre est beaucoup plus considérable que $\frac{1}{230}$. 2°. M. *Newton* pour déterminer la précession des Equinoxes, suppose que la force de la Lune sur la terre est environ quadruple de la force Solaire; or il n'a déduit ce rapport entre les deux forces, que de la hauteur des marées, & je ne crois pas cette méthode assez exacte. J'ai trouvé au contraire (*art.* 54) par les observations de la précession des Equinoxes & de la nutation, que la force Lunaire n'est qu'environ deux fois $\frac{1}{3}$ plus grande que celle du Soleil, d'où il s'ensuit qu'en accordant tout le reste à M. *Newton*, la précession annuelle ne devroit pas être de 50″, telle qu'il la trouve, mais d'environ 30 ou 35″. Enfin, M. *Newton*, dans la proposition citée, n'a rien dit sur la nutation de l'Axe de la terre : or cette nutation, comme nous l'avons vû, doit altérer sensiblement la précession des Equinoxes. Je crois aussi qu'il auroit dû faire voir pourquoi l'action du Soleil & de la Lune changent si peu l'inclinaison de l'Axe de la terre sur l'Ecliptique, quoiqu'elles tendent à faire tourner la terre autour d'un Axe placé dans l'Equateur. C'est ce que j'ai expliqué fort clairement, si je ne me trompe, dans l'*art.* 126. Cette condition étoit, ce me

femble, d'autant plus néceſſaire pour mettre la ſolution de M. *Newton* à l'abri de toute atteinte, que dans la diſtribution de mouvement que ce grand Geométre imagine ſe faire entre l'anneau circulaire, & le globe, il paroît ſuppoſer, comme nous l'avons déja remarqué, que l'anneau tourne ou tend à tourner autour d'un de ſes diamétres, & par conſéquent autour d'un des diamétres de l'Equateur; d'où il s'enſuivroit que la rotation qu'il communique au globe devroit auſſi ſe faire autour d'un des diamétres de l'Equateur, & qu'ainſi le Pôle de la terre ſeroit bien éloigné de ſe mouvoir à peu près parallélement au plan de l'Ecliptique, ce qui ſeroit très-contraire aux obſervations.

En voilà, ce me ſemble aſſez, pour faire voir que cette importante matiére avoit peut-être beſoin d'être traitée plus à fond qu'elle ne l'a été par ce grand Geométre, & que le Problême que j'ai réſolu dans cet Ouvrage eſt du moins à pluſieurs égards entiérement nouveau.

CHAPITRE XV.

Réflexions ſur les différens mouvemens apparens, ou réels, que l'on peut obſerver dans l'Axe de la terre.

147. JE n'ai traité dans cet Ouvrage que des mouvemens les plus ſenſibles de l'Axe terreſtre, & les ſeuls qu'on puiſſe regarder comme connus aujourd'hui

des Aſtronomes ; ſçavoir la préceſſion moyenne & annuelle des Equinoxes, l'équation de cette préceſſion, & la nutation de l'Axe de la terre qui eſt à peu près de 18 ſecondes en 19 ans : j'ai prouvé, de plus, que ces mouvemens s'accordent, autant qu'on le peut deſirer, avec le ſyſtême de l'Attraction. Car quoique je faſſe décrire au Pôle de la terre une petite Ellipſe au lieu d'un cercle que lui fait décrire M. *Bradley*, la différence que ces deux ſuppoſitions produiſent dans les calculs, ne va qu'à un très-petit nombre de ſecondes. Or quand on voudroit s'en tenir abſolument aux obſervations de M. *Bradley*, & ne les pas ſoupçonner de la moindre erreur, on pourroit encore attribuer la différence entre ma Théorie & les obſervations, à quelques autres petites équations négligées dans le mouvement de l'Axe de la terre.

On a vu dans le calcul des deux formules Y & Z de l'*article* 45, que je n'ai point eu d'égard à pluſieurs termes qui renferment quelques petites équations, parce que la plus conſidérable doit aller à moins d'une ſeconde. En effet, il a été prouvé dans l'*article* 52, que les coefficiens $\frac{3A}{2K}$ & $\frac{3A(1+\zeta)m'}{2K}$ doivent être entr'eux après l'intégration, comme 1 à 6, & davantage ; ainſi puiſque le ſecond de ces coefficiens ne donne une équation que de 9″, il s'enſuit que le premier donneroit à peine une équation d'une ſeconde. Mais cette équation diminuera encore, ſi l'on conſidére que le premier coefficient eſt multiplié par Coſ. π^2, & le ſecond par

Sin. π. Cof. π qui eft beaucoup plus grand. De même dans l'équation Z, on trouvera que le facteur $1 - 2 \times$ Cof. $\pi^2 =$ (*art.* 60) $\frac{62}{100}$; or cette fraction eft plus grande que Sin. $\pi \times$ Cof. π, qui n'eft égal qu'à $\frac{36}{100}$. Donc &c. Ces obfervations font voir combien nous avons été en droit d'omettre dans les formules du mouvement de l'Axe terreftre, les termes que nous avons traités comme nuls dans les équations Y, Z ; dans cette même équation Z, nous avons dû négliger le terme $dd\pi$, parce que ce terme eft à celui qui contient $1 - 2$ Cof. ϖ^2 dans l'équation différentielle, comme Sin. $\varpi \times \frac{n' - M}{365\frac{1}{4}}$ eft à $1 - 2$ Cof. ϖ^2, c'eft-à-dire, comme 1 eft à $12 \times 365\frac{1}{4}$ à très-peu près ; ainfi l'on voit que le terme $dd\pi$ eft encore beaucoup plus petit que nous l'avons fuppofé dans l'*article* 52. Je crois donc que toutes les quantités négligées dans les formules de l'*art.* 52, ne font d'aucune confidération, parce qu'elles n'altérent point fenfiblement la nutation de l'Axe de la terre.

148. Un plus grand nombre d'obfervations nous apprendra, s'il y a en effet quelque autre mouvement dans cet Axe, dont on doive tenir compte, & il fera poffible avec un peu de patience & de calcul, de s'affurer fi le fyftême de l'Attraction eft favorable ou non à ces divers mouvemens. Il ne faudra pour cela que réfoudre plus exactement les formules Y, Z, ou, ce qui revient

au même, en trouver l'intégrale plus approchée ; or l'on a des méthodes pour approcher autant qu'on veut de l'intégrale d'une équation dont on connoît déja l'intégrale à peu près.

149. L'inégalité qu'on obſerve dans les diſtances de la Lune à la terre, ainſi que dans les mouvemens de cette Planete, eſt une des circonſtances auxquelles il ſera le plus néceſſaire d'avoir égard dans le calcul. Nous avons ſuppoſé que cette Planete ſe meuve dans un cercle parfait autour de la terre avec une viteſſe uniforme, & nous avons fait la même ſuppoſition par rapport au mouvement de la terre autour du Soleil : or perſonne n'ignore que la terre parcourt une Ellipſe dont le Soleil eſt le foyer, & dont les apſides ont un mouvement très-lent, & que la Lune décrit auſſi autour de la terre une orbite à peu près Elliptique, dont les apſides font leur révolution en 9 ans ; je dis à peu près Elliptique, à cauſe de différentes inégalités qui altérent le mouvement de la Lune dans cette orbite, & dont je traiterai ailleurs plus en détail. De-là il s'enſuit, que ſi on nomme B la diſtance moyenne de la Terre au Soleil, & ζ l'Arc qu'elle parcourt réellement durant le tems qu'elle décriroit l'Arc z par ſon mouvement moyen, on aura a ou la diſtance variable de la Terre au Soleil, égale à $B + E$ Coſ. $K\zeta + G$ Sin. $K\zeta$, E, G, étant des quantités conſtantes qui dépendent de l'excentricité de l'orbite terreſtre, & de la poſition de l'aphelie, lorſque $\zeta = 0$, & K une quantité très-peu différente de l'unité,

dont la valeur dépend du mouvement des apsides de l'orbite terrestre. De plus, on a $z = \zeta + Q$ Sin. $K\zeta + R$ Cos. $K\zeta$, Q, & R étant aussi des constantes qui dépendent de l'excentricité & de la position de l'aphelie: c'est pourquoi supposant comme dans l'*art.* 43., $dt = \frac{Bdz}{g}$ & $dt^2 = \frac{B^2dz^2}{g^2}$, ou $\frac{dz^2}{S} \times B^3$, & conservant aussi l'Arc Mz, qui marque la précession annuelle des Equinoxes, on mettra au lieu de z la quantité ζ, ou $z - Q \times$ Sin. $Kz - R$ Cos. Kz, &c. de même au lieu de $\frac{1}{u^3}$, on mettra $\frac{1}{B^3} \times (1 - \frac{3E}{B}$ Cos. $Kz - \frac{3G}{B}$ Sin. Kz, &c.); on aura pareillement 1°. la valeur de $\frac{1}{u'^3}$, u' étant la distance de la Lune à la Terre, 2°. celle de l'Arc ζ' que la Lune parcourt durant le tems que la terre décrit l'Arc ζ. Car on trouvera $= B' + E'$ Cos. $K'\zeta' + G' \times K'\zeta'$, B' étant la distance moyenne de la Lune à la Terre, K' une quantité qui marque le mouvement des apsides, & E', G' des quantités qui dépendent de l'excentricité & de la position de l'aphelie. On trouvera de même $nz = \zeta' + Q'$ Sin. $K'\zeta' + R$ Cos. $K'\zeta'$, &c. On mettra donc dans les formules Y & Z, à la place de $\frac{1}{u'^3}$ sa valeur $\frac{1}{B'^3} \times (1 - \frac{3E'}{B}$ Cos. $K'nz - \frac{3G'}{B} \times$ Sin. $K'nz$, &c.), & à la place de nz, la quantité $nz - Q$ Sin. $K'nz - R$ Cos. $K'nz$, &c; & après avoir in-

tégré l'équation, on pourra, si l'on veut, mettre à la place de z & de nz leurs valeurs trouvées ci-dessus en ζ & en ζ', afin que les formules de la précession des Equinoxes & de la nutation renferment les vrais angles ζ & ζ' que le Soleil & la Lune décrivent dans un tems donné, & qu'elles deviennent par-là plus faciles à calculer pour les usages Astronomiques. Toutes ces corrections & approximations, qui demandent des calculs assez longs & assez pénibles, ne produiroient, autant que j'en puis juger, que des équations très-petites & peut-être absolument insensibles.

La raison qui me porte à le croire, c'est que je vois que les mouvemens de l'Axe de la terre découverts par M. *Bradley* s'accordent très-bien avec ce que nous avons trouvé, en résolvant nos formules par approximation. Mais j'espere dans la suite examiner ce point plus à fond, & m'assurer si en effet l'Axe de la terre ne doit point être sujet à quelque autre mouvement sensible. Les calculs que cette recherche me donnera lieu de faire, comparés avec les observations que feront les Astronomes, nous fourniront de nouvelles lumieres sur le systême Newtonien. L'Ouvrage que je donne aujourd'hui est une espéce d'engagement que je prends à cet égard, & que je tâcherai de remplir le mieux qu'il me sera possible.

150. De tous les mouvemens que l'Axe de la terre peut avoir, celui qu'il importe le plus de découvrir, mais sur lequel les Astronomes ne seront pas en état

de prononcer si-tôt, c'est la diminution prétendue de l'obliquité de l'Ecliptique. Selon M. *le Chevalier de Louville*, cette obliquité diminue d'environ une minute en 100 ans, c'est-à-dire que l'angle de l'Axe de la terre avec l'Ecliptique devient plus grand de 1′ à la fin de chaque siécle. Mais il s'en faut beaucoup que cette opinion de M. *le Chevalier de Louville* puisse être regardée comme démontrée : il suffit, pour s'en convaincre, de lire les Réflexions de M. *le Monnier* sur ce sujet, dans la Préface de ses *Institutions Astronomiques*.

151. Je n'ai point cru devoir chercher par le moyen de mes formules, si cette diminution de l'obliquité de l'Ecliptique doit en effet avoir lieu. Outre que cette recherche demande de longs calculs, & par conséquent beaucoup de tems, elle seroit d'ailleurs insuffisante pour décider la question. Car quand on s'assureroit par la résolution des équations Y & Z, que l'action du Soleil & de la Lune ne doit produire que des mouvemens de nutation ou de balancement dans l'Axe de la terre, ce qui suppose une Analyse très-délicate & très-compliquée, on n'en pourroit pas conclure pour cela, que l'action des autres Planetes sur la terre ne dût pas produire dans l'Axe de notre globe un mouvement par lequel le Pôle de la terre s'éloignât insensiblement de l'Ecliptique, ou un mouvement dans l'Ecliptique même, par lequel elle s'éloignât du Pôle de la terre. Or la solution de ce Problême n'est point du ressort de cet Ouvrage ; je pourrai exposer ailleurs les moyens par lesquels

quels je crois qu'on doit y parvenir. Il eſt néceſſaire encore de s'aſſurer, comme le remarque M. *Bradley*, ſi la Sphere des Etoiles & notre ſyſtême Solaire ſont dans un repos parfait, & ſi quelques Etoiles ne ſont pas ſujettes à des mouvemens particuliers ; afin de ne pas confondre ces mouvemens, s'ils exiſtent, avec les mouvemens réels de l'Axe de la terre. Or des recherches ſi pénibles & ſi ſubtiles ne peuvent être que l'ouvrage du tems : il doit, ce me ſemble, nous ſuffire pour le préſent d'avoir bien prouvé dans ces Recherches, que le ſyſtême de l'Attraction s'accorde avec les Phenomenes que nous avons entrepris d'expliquer, & qui ſont les ſeuls bien conſtatés ; & qu'ainſi la Théorie du mouvement de l'Axe de la terre, paroît au moins juſqu'à préſent, très-favorable à ce ſyſtême:

Je me contenterai donc d'examiner en peu de mots dans le Chapitre ſuivant, le petit changement que l'action de la Lune peut cauſer dans la ſituation de l'Ecliptique, parce que ce petit changement, s'il eſt ſenſible, doit produire des variations apparentes dans la déclinaiſon & dans l'aſcenſion droite du Soleil, & par conſéquent dans ſes différences en aſcenſion droite & en déclinaiſon avec les Etoiles fixes. Une telle recherche n'eſt point étrangere à l'objet de ce Traité, puiſque l'action de la Lune changeant à chaque inſtant la poſition du plan de l'Ecliptique, change auſſi la poſition de l'Axe de la terre par rapport à ce plan.

CHAPITRE XVI.

De la variation du Soleil en latitude, causée par l'action de la Lune sur la terre.

152. COMME la Lune ne se meut pas exactement dans le plan de l'Ecliptique, il est évident que l'action de cette Planete sur la terre doit tantôt élever, tantôt abbaisser la terre par rapport à ce plan, & que par conséquent l'orbite terrestre, ou, ce qui revient au même, l'orbite apparente du Soleil, n'est pas rigoureusement plane, de maniére que le Soleil peut avoir quelque variation apparente plus ou moins sensible en latitude, en s'approchant & s'éloignant alternativement de certaines Etoiles, surtout de celles qui sont situées vers les cercles Polaires. C'est la quantité & les loix de cette variation que nous allons déterminer.

153. Nous supposerons dans le calcul suivant, que la Lune & la Terre décrivent des cercles dont les rayons soient B' & B, ou B' & 1, en prenant B pour l'unité, que S soit la masse du Soleil, λ celle de la Lune, z l'arc ou l'angle que la Terre décrit dans un tems quelconque t, au commencement duquel on suppose que la Lune a passé par son nœud ascendant, g la vitesse apparente du Soleil. Donc $dt = \frac{Bdz}{g}$ & $dt^2 = \frac{B^2dz^2}{g^2}$. Or l'action du Soleil à la distance B étant $\frac{S}{B^2}$, on aura

$g^2 = \frac{S}{B^2} \times B = \frac{S}{B}$; de plus, l'angle que décrit la Lune durant le tems t ſera nz : & ſi on ſuppoſe, comme dans les Chapitres précedens, que les nœuds de l'orbite Lunaire ſe meuvent d'un mouvement rétrograde avec une viteſſe angulaire qui ſoit à celle de la Terre, comme n' à 1, on aura l'Arc parcouru durant le tems t par la ligne des nœuds $= n'z$: donc la diſtance de la Lune au nœud ſera $nz + n'z$.

Soit à préſent la Terre en t (Fig. 62) au commencement du tems t, lorſque la Lune a paſſé par ſon nœud aſcendant. Il eſt certain que cette Planete décriroit l'orbite circulaire plane tt' autour du Soleil, ſi la Lune demeuroit dans le plan de l'Ecliptique; mais comme la Lune en s'élevant au-deſſus de ce plan oblige la Terre de s'en écarter, ſoit ſuppoſée la Terre en T, & la Lune en L ; & ayant mené parallélement au plan tSt', la ligne NTn, qui repréſente la poſition de la ligne des nœuds pour cet inſtant, on abbaiſſera la perpendiculaire Tt' au plan tSt', & la perpendiculaire Ll au plan nTl parallele à tSt; & il eſt évident que la force qui tire la Terre T ſuivant Tt', eſt $\frac{S}{B^2} \times \frac{Tt}{B} - \frac{\lambda}{B'^2} \times \frac{Ll}{TL}$: faiſant donc $Tt' = x$, & conſidérant que Ll eſt au Sinus de l'angle nTl, dans la raiſon de la tangente de l'inclinaiſon de l'orbite Lunaire au Sinus total, c'eſt-à-dire dans la raiſon de m' à 1, on aura $\frac{Ll}{Tl} = (\text{Sin. } nz + n'z) \times$

m', & par conſéquent la force accélératrice qui agit ſur le point T ſuivant Tt', ſera $\frac{Sx}{B^3} - \frac{\lambda m}{B'^2} \times (\text{Sin.}\, nz + n'z)$. Or comme cette force agit ſuivant Tt' (*hyp.*), & tend à diminuer la viteſſe du point T ſuivant Tt', on aura $-ddx = (\frac{Sx}{B^3} - \frac{\lambda m'}{B'^2} \times [\text{Sin.}\, nz + n'z])\, dt^2$, ou (mettant pour dt^2 ſa valeur $\frac{B^2 dz^2}{g^2} = \frac{B^3 dz^2}{S}$, & ſuppoſant $n + n' = p$) $ddx + xdz^2 - \frac{\lambda m' B^3 dz^2}{S \,.\, B'^2}\, \text{Sin.}\, pz = 0$; faiſant donc $\frac{-\lambda m B^3 dz^2\, \text{Sin.}\, pz}{S \,.\, B'^2} = Mdz^2$, & conſidérant que x & $\frac{dx}{dz}$ ſont $= 0$, lorſque $z = 0$, on aura $x = -\frac{c^{-z\sqrt{-1}} \int M\sqrt{-1}\, dz\, c^{z\sqrt{-1}}}{2} + \frac{c^{z\sqrt{-1}} \int M dz \sqrt{-1}\, c^{-z\sqrt{-1}}}{2}$: donc mettant pour M ſa valeur exprimée par des exponentielles imaginaires, il viendra $\frac{x}{B} = -\frac{\lambda m' B^2}{2 S B'^2} \times (\frac{2\, \text{Sin.}\, pz}{pp - 1} + \frac{2p\, \text{Sin.}\, z}{1 - pp})$. Le ſecond membre de cette équation eſt donc la valeur du Sinus, ou de la tangente de l'angle TSt'. Or la force attractive de la Terre ſur la Lune étant $\frac{T}{B'^2}$, on a $\frac{T}{B'^2} : \frac{S}{B^2} :: B' \,.\, \frac{B}{n^2}$, & par conſéquent ſi on ſuppoſe $\lambda = \frac{T}{q}$, on trouvera $\frac{x}{B} = \frac{-B' m' n^2}{2Bq} \times$

$\left(\frac{2\ \text{Sin.}\ pz}{pp-1} + \frac{2p\ \text{Sin.}\ z}{1-pp}\right)$: mais p^2 eſt à peu près $= n^2$, à cauſe que n' eſt fort petit par rapport à n; ainſi la plus grande valeur de $\frac{x}{B}$ ſera à peu près $\frac{B'm'}{qB} \times (p+1)$ Sin. tot. Or $m' = \frac{\text{tang. 5 degrés}}{\text{Sin. tot.}}$; $p+1 =$ à peu près 15, parce que $n = 13\frac{1}{2}$: à l'égard des quantités B', B elles ſont entr'elles en raiſon inverſe des parallaxes de la Lune & du Soleil ; or ſuivant les Aſtronomes, la parallaxe de la Lune eſt d'environ 57', & M. *le Monnier* dans ſes *Inſtitutions Aſtronomiques*, fait la parallaxe du Soleil de 15". Donc $\frac{B'}{B} = \frac{15''}{57'}$: enfin $\frac{1}{q} = \frac{1}{80}$ ſuivant le calcul de l'*article* 57 : donc on aura ſuivant ces différentes hypotheſes $\frac{x}{B} = \frac{15''}{57 \cdot 60''} \times \frac{15}{80} \times$ tang. $5° =$ environ $\frac{1'}{4}$. Or comme cette quantité eſt tantôt affirmative, & tantôt négative, il s'enſuit que la variation apparente du Soleil en latitude devroit être d'environ $\frac{1'}{2}$, ſçavoir d'environ $\frac{1'}{4}$ vers le Midi, trois mois après que la Lune a paſſé par ſon nœud aſcendant, & d'environ $\frac{1'}{4}$ vers le Nord, neuf mois après que la Lune a paſſé par ce nœud. Il peut y avoir encore dans la valeur de x quelques équations à calculer. Car ceci n'eſt qu'un *eſſai*.

REMARQUE I.

154. Au reste, ce changement doit suivre assez exactement la période que nous venons de marquer. Mais sa quantité déterminée par la Théorie n'est pas aussi sûre, parce que la parallaxe du Soleil n'est pas encore suffisamment connue. Nous avons supposé avec les plus célébres Astronomes, cette parallaxe égale à 15″; si les observations ou l'expérience nous faisoient connoître dans la suite que cette quantité dût être diminuée ou augmentée, il faudroit diminuer ou augmenter en même raison la variation du Soleil en latitude. Je crois même que si les Astronomes ne remarquent point de variation sensible dans la latitude du Soleil, c'est une marque que cet Astre a une parallaxe beaucoup plus petite que 15 secondes; car de tous les Elémens qui entrent dans la formule de la variation du Soleil en latitude, le plus incertain est celui de la parallaxe du Soleil, la masse de la Lune ayant été déterminée assez exactement dans le Chapitre cinquiéme.

REMARQUE II.

155. Comme c'est par les observations de la déclinaison du Soleil, qu'on peut découvrir plus facilement si cet Astre a une variation sensible en latitude, nous allons donner ici l'équation entre la variation de la latitude, celle de la déclinaison, & celle de l'ascension droite.

Soit (Fig. 63) ♈ E l'Équateur, ♈ S, l'Ecliptique, Ss un Arc très-petit, perpendiculaire à l'Ecliptique, & qui marque la variation apparente en latitude, P le Pôle, SQ, Ee, les variations en déclinaison & en ascension droite qui correspondent à la variation en latitude; soit $Ss = \alpha$, on aura $SQ = Ss \times$ Sin. ES♈, & $Ee = \frac{sQ}{\text{Sin. décl.}} = \frac{Ss \times \text{Cos. } ES♈}{\text{Sin. décl.}}$: or soit k le Sinus de l'angle S♈E, ou, ce qui est la même chose, le Cosinus de l'angle ϖ que fait l'Axe de la terre avec l'Ecliptique; on aura $\frac{\text{Sin. } SE}{\text{Sin. } ♈S} =$ Cos. ϖ ou k; d'où il s'ensuit, que Cos. $\varpi = \frac{SL \times \text{Cos. décl.}}{SO \text{ Cosin. longit.}}$: donc $\frac{SL}{SO}$, c'est-à-dire le Cos. de ES♈ $= \frac{\text{Cos. } \varpi \times \text{Cos. longit.}}{\text{Cos. décl.}}$. Connoissant le Cosinus de ES♈, on connoîtra facilement cet angle & son Sinus, & on remarquera que ce Sinus doit toujours être pris positivement, parce que l'angle ♈SE n'est jamais de 180 degrés. Ainsi on fera les deux Analogies suivantes.

Premiere analogie: comme le Sinus total est au Sinus de ES♈, ainsi la variation en latitude est à un quatriéme terme qu'il faudra ajouter à la déclinaison, ou en soustraire, si la déclinaison est Méridionale.

Seconde analogie: comme le Sinus de la déclinaison est au Cosinus de ES♈, ainsi la variation en latitude

est à un quatriéme terme qu'il faudra soustraire de l'ascension droite.

Je suppose dans cette Figure *63*, que la variation de latitude est Septentrionale : si elle étoit Méridionale, il faudroit la traiter comme une quantité négative.

FIN.

FAUTES A CORRIGER.

P*Age* 23, *lig.* 17, au lieu de *Z*, *lisez* *Z'*
Pag. 25, *lig.* 3 & 15, au lieu de Ψ', *lis.* Ψ
Pag. 31, *lig.* 15, au lieu de parallélement, *lis.* perpendiculairement
Pag. 37, *lig.* 16, au lieu de $C\epsilon''$, *lis.* Ce''
Pag. 60, *lig.* 2 de la note, au lieu de π, *lis.* l'équation de π
Pag. 62, *ligne derniere*, au lieu de, ce rapport, *lis.* le rapport de 1 à $1 + \epsilon$
Pag. 69, *lig.* 9, au lieu de *te*, *lis.* *the*
Pag. 104, *ligne derniere*, au lieu de [:] *lis.*] : [
Pag. 112, *lig.* 18, effacez × Cos. $n'z - Mz$

DE L'IMPRIMERIE DE JEAN-BAPTISTE COIGNARD,
IMPRIMEUR DU ROI.



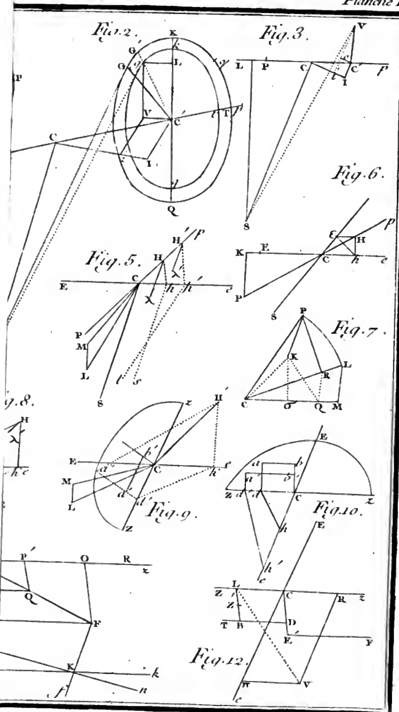

Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 12.

Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 24.
Fig. 25.

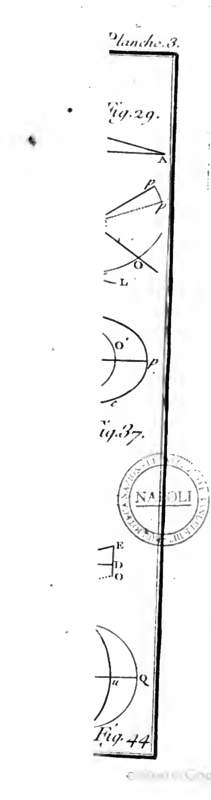
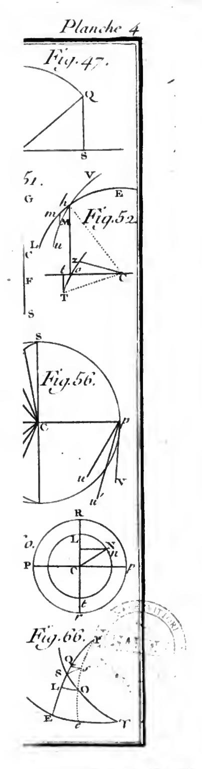


Fig.29.

Fig.37.

Fig.44


Fig. 47.
Q
S
51.
V
E
G
h
m
M
Fig. 52
L
u
u
C
z
t
o
C
F
T
S
S
Fig. 56.
C
p
u
u
V
R
L
N
n
P
C
p
t
r
Fig. 66.
Q
S
L
O
E
e





